Equações Diferenciais Ordinárias com Aplicações em Modelagem

Rafael Ferraz do Nascimento
Universidade Federal do ABC
rafaelfnfn@yahoo.com.br
Ilma Aparecida Marques
CMCC Universidade Federal do ABC
CEP 09210-170, Santo André, SP
Ilma.marques@ufabc.edu.br

RESUMO

As equações diferenciais surgem a partir da tentativa de formular, ou descrever certos sistemas físicos em termos matemáticos, ou seja, fazer uma modelagem matemática do problema.

Em virtude disso, foram estudadas neste trabalho as equações diferenciais de 1ª ordem e de ordem superior. Como aplicação foi estudada a dinâmica populacional urbana da cidade de Santo André segundo os modelos de Malthus e Verhulst. Os parâmetros de ambos os modelos foram calculados, a partir de dados reais, obtido no site do SEADE (http://www.seade.gov.br). A simulação da dinâmica segundo Malthus apresentou resultados condizentes com a realidade num intervalo de tempo determinado, no entanto, a melhor arpoximação foi obtida através do modelo de Verhulst, que se mostrou mais eficiente para um intervalo maior de tempo.

Os métodos utilizados nesses cálculos são descritos a seguir:

Método de Malhus: Malthus propôs a seguinte relação para a taxa de crescimento de uma população em relação ao tempo: $\frac{dP}{dt} = \lambda P.$ Deixando na forma de uma EDO de primeira ordem, ficamos com $\frac{dP}{dt} - \lambda P = 0.$ Da resolução desta Equação Diferencial, ficamos com a função que utilizamos para os cálculos efetuados no trabalho: $P(t) = P_0 e^{\lambda t}$.
Onde P é a população no instante t, e P_0 a população inicial no instante t_0.

Método de Verhulst: Verhulst propôs que a população atingia um número máximo de indivíduos suportados. Sendo assim, a população depende também da diferença entre o número máximo de indivíduos suportados e a população em determinado instante. Sendo assim: $\frac{dP}{dt} = \lambda P(P_m - P).$ Com a resolução da EDO, e alguma álgebra envolvida, ficamos com

Onde P_0 é a população inicial no instante t_0, P_m a população limite suportada, e P a população no instante t.

Fazendo a primeira equação igual a $\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = aP + b$, onde a = $-\lambda$ e b = λP_m.

Obtemos a e b então pelo método dos Mínimos Quadrados:

$$a = \frac{n\Sigma P_i z_i - (\Sigma P_i).(\Sigma z_i)}{(n\Sigma P_i^2) - (\Sigma P_i)^2};$$

$$b = \frac{(\Sigma z_i)(\Sigma P_i^2) - (\Sigma P_i)(\Sigma P_i z_i)}{(n\Sigma P_i^2) - (\Sigma P_i)^2}$$

e $z_i = \frac{g_i + h_i}{2}$, onde g_i e h_i são aproximações de P'(t) para t_i = 1980, 1981, ..., 2005, P(i) = P(t) pela diferença finita para frente e para trás, respectivamente.

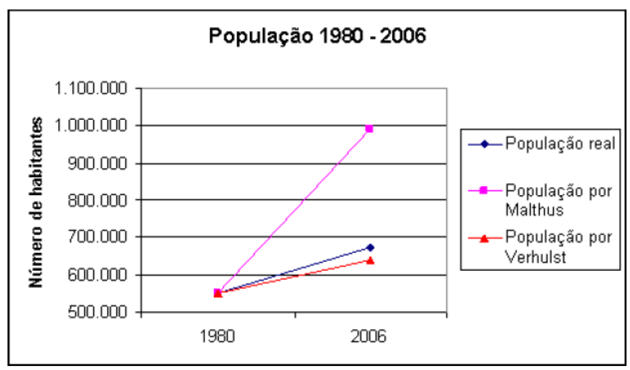

Figura 1 – Comparação dos métodos de Malthus e Verhulst utilizando um grande intervalo de tempo (1980 – 2006)

REFERÊNCIAS

[1] Zill, Denis G. Equações Diferencias com Aplicações em Modelagem. Thomson.
[2] W. E. Boyce, R. C. Di Prima Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno Editora. LTC
[3] Spiegel, Murray, Estatística, Makron Book.