Cálculo Quântico

Ícaro Gonçalves* and Roldão da Rocha Jr†
Centro de Matemática, Computação e Cognição,
Universidade Federal do ABC, 09210-170, Santo André, SP, Brazil

RESUMO

Este trabalho faz parte de um extenso programa que tem, dentre as várias motivações, a introdução de um formalismo matemático que seja capaz de se descrever fenômenos da Natureza na escala de Planck ($\sim 10^{-33}$ cm). O cálculo quântico, ou q-cálculo, proporciona a introdução de um formalismo subjacente à denominada geometria das tranças — em particular no plano cartesiano — e generaliza os conceitos de álgebra e superálgebra, que são apenas casos particulares quando $q = \pm 1$. Planos quânticos são exemplos simples de espaços quânticos e têm sido intensamente estudados por muitos autores nos últimos anos. Eles surgem como deformações de planos em que grupos quânticos agem de maneira covariante. Um dos planos quânticos, referidos como o plano quântico q-deformado ou plano quântico de Manin, é definido como a álgebra associativa geradas por dois elementos não-comutativos X e Y tais que $XY = qYX$.

A partir dos conceitos fundamentais do q-cálculo e aritmética quântica, este trabalho investiga o princípio da q-contagem em análise combinatória e partições clássicas dos números inteiros, a fim de posteriormente introduzir matrizes quânticas e o plano não-comutativo. Um dos objetivos centrais é primeiramente introduzir os fundamentos do cálculo sobre reticulados através do q-cálculo, suas generalizações e alguns resultados importantes e não-triviais em teoria de números neste contexto, ainda que a obtenção dos mesmos resultados utilizando o formalismo padrão possa ser extremamente extenso.

Dentre as várias estruturas matemáticas que se destacam pela versatilidade e importância de suas aplicações, o q-cálculo ocupa posição privilegiada. Certamente é através de suas aplicações em teoria de números, grupos quânticos, álgebra linear e geometria não-comutativa, que ele tem historicamente merecido mais destaque, mas nos últimos anos também em outras áreas — como a topologia e física — tem-se encontrado interessantes aplicações. O caráter essencial das

*Electronic address: icaro.goncalves@ufabc.edu.br
†Electronic address: roldao.rocha@ufabc.edu.br

q-deformações é que outras estruturas matemáticas clássicas e tradicionais são reobtidas quando $q \to 1$. As q-deformações são também fundamentais dentro de outras estruturas matemáticas, das quais gostaríamos de destacar a geometria não-comutativa, além de ser uma abordagem inicial para os grupos quânticos.

Com o princípio da q-deformação tratamos os números q-binomiais $\binom{n}{m}_q$, que para inteiros n e m é definido[1] por $\binom{n}{m}_q = \frac{[n]!}{[m]!\cdot[n-m]!}$, estabelecendo-se as q-fórmulas de Pascal $\binom{n+1}{m+1}_q = \binom{n}{m}_q + q^{m+1}\binom{n}{m+1}_q = q^{n-m}\binom{n}{m}_q + \binom{n}{m+1}_q$, $n \geq 0, \quad 1 \leq m \leq n$. Algumas fórmulas como o produto triplo de Jacobi

$$\sum_n q^{n(n+1)/2} x^n = \prod_i (1 + xq^i)(1 + x^{-1}q^{i-1})(1 - q^i) \tag{1}$$

não possuem análogos clássicos, e o presente formalimo fornece tais fórmulas, que não possuem análogo fora do contexto das q-deformações. Recentemente, a teoria quântica está obtendo sua forma cada vez mais profunda na matemática, de maneira de que para cada ramo da matemática, desenvolvemos uma versão quantizada correspondente, a partir dos chamados grupos quânticos. O processo de introduzir a variável q é conhecido como quantizar o problema.

A aritmética quântica fala de duas versıes modificadas do cálculo: o "h-cálculo"e do "q-cálculo". A letra h fisicamente simboliza a escala de Planck enquanto que q é então definido por $q = \exp(ih)$. Em particular, essas versıes modificadas do cálculo se reduzem ao cálculo diferencial introduzido por Newton e Leibniz no limite em que $h \to 0$ ($q \to 1$). A idéia se baseia em definir a h-derivada sem utilizarmos o limite, introduzindo assim um cálculo sobre reticulados:

$$f'_h(x) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2}$$

No limite quando $h \to 0$, a fórmula acima se reduz à derivada habitual. Já a q-derivada $D_q(f(x))$ é definida como

$$D_q(f(x)) = f'_q(x) := \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}, \quad x \neq 0 \tag{3}$$

e $D_q(f(x)) = f'(0)$ para $x = 0$, e se reduz à derivada habitual quando $q \to 1$. Quando q é um inteiro, podemos tomar as q-derivadas de uma função que é definida apenas sobre os inteiros, e ademais, quando q é um número primo ou uma potência de um número primo, então existem algumas conexıes interessantes com a álgebra. Provamos que a regra da cadeia não existe no

[1] $[n] = \frac{1-q^n}{1-q}$ e recursivamente $[n]! = [n][n-1]!$, com $[0]! = 1$.

q-cálculo, com exceção de funções do tipo $f(x) = ax^b$, onde a, b são constantes. O q-análogo da fórmula de Taylor é também obtido, que tradicionalmente nos diz como reconstruir qualquer função que cumpra algumas condições a partir de suas derivadas: $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2/2! + \dots$ A extensão da fórmula de Taylor para o q-cálculo pode ser imediatamente obtida a partir das q-derivadas e q-fatoriais. A n-ésima q-derivada de uma função é definida de maneira óbvia, tomando-se a q-derivada uma a uma subsequentemente. Por exemplo, $D_q(x^n) = \frac{(qx)^n - x^n}{qx - x} = \frac{q^n - 1}{q - 1} x^{n-1}$ e portanto, a q-derivada de $f(x) = x^n$ é apenas $D_q(x^n) = [n]x^{n-1}$, o que implica que a n-ésima q-derivada de x^n (note que tal derivada é definida indutivamente: para $n \in \mathbb{N}$, $D_q^1 = D_q$ e $D_q^n = D_q(D_g^{n-1})$) é o q-fatorial $[n]!$. Mostramos que a fórmula de Taylor é válida ao substituirmos as derivadas por q-derivadas e fatoriais por q-fatoriais. Muitas propriedades interessantes incorrem no limite quando $q \to 1$ ou $n \to \infty$. Por exemplo, para $|q| < 1$ temos que $\lim_{n\to\infty}[n] = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}$. Introduzimos adicionalmente as fórmulas de Gauß e de Heine, bem como as funções exponencial e trigonométricas, no contexto do q-cálculo.

Fornecemos uma relação de recorrência que cálculo o número de partições de um número inteiro arbitrário, e as fórmulas hipergeométricas são introduzidas para a demonstração do teorema de Fermat, que afirma que todo número inteiro pode ser escrito como a soma de no máximo quatro quadrados.

Em um nível macroscópico, é comum trabalharmos com a mecânica clássica newtoniana. Porém, quanto penetramos no mundo microscópico, vemos que a física clássica torna-se uma aproximação do que chamamos de física quântica. Na física quântica, matematicamente, trabalha-se com um parâmetro de deformação para descrever um novo sistema físico não mais comutativo. Esse parâmetro de deformação é conhecido como constante de Planck, $\hbar$. Quando $\hbar \to 0$, a estrutura da física clássica é retomada. Por isso, o cálculo quântico é importante, pois ele define, matematicamente, a deformação de sistemas originalmente comutativos para sistemas não comutativos através de um parâmetro de deformação $q = \exp(ih)$, em que h simboliza a escala de Planck.

---

[1] D. Hakon et al, *Tópicos em Matemática Quântica*, 22o. Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 26-30 Julho, Rio de Janeiro 2002.

[2] R. Jaganathan, *An Introduction to Quantum Algebras and Their Applications* [`arXiv:math-ph/0003018v1`].

[3] C. Kassel, *Quantum Groups*, Springer-Verlag, Berlin 1995.

[4] H. B. Benaoum, *(q, h)-analogue of Newton's binomial formula*, J. Phys. A: Math. Gen. **32** (1999) 2037-2040, *(h)-analogue of Newton's binomial formula*, J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998) L751-L754.

[5] S. Cho, J. Madore e K. S. Park, *Non-commutative geometry of the h-deformed quantum plane*, J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998) 2639-2654.

[6] M. E. Sweedler, *Hopf Algebras*, Math. Lecture Notes **44**, Benjamin Inc., New York 1969.