

Teoremas Notáveis da Geometria Plana

Luiz Felipe Araujo Mod,
Valério Ramos Batista

CMCC-UFABC

Resumo: A Geometria Plana Euclidiana proporciona uma visão privilegiada na solução de problemas práticos e teóricos, além de descobertas motivantes. Apesar de ser uma teoria já encerrada no século XIX, seu domínio é essencial para o desenvolvimento de outras áreas, como Física e Engenharia.

Fixou-se como objetivo o estudo de resultados notáveis como “a circunferência de nove pontos” e “a reta de Euler”. Estes formam uma coleção de exemplos cujos enunciados são tão intrigantes que muito impellem a vontade de conhecer todos os passos de suas demonstrações.

Os resultados, como tratam-se de teoremas antigos e já conhecidos, concentram-se muito mais no *aprendizado* e *domínio* da axiomática envolvida, além da intuição geométrica, que desenvolveu-se por dedicação ao estudo desta teoria. Ressalta-se que as demonstrações obtidas são *mais* rigorosas do que as encontradas nas literaturas clássicas de Geometria Plana. Esta é a parte original do trabalho.

Conclui-se que a Geometria Plana é uma ciência viva, que seu exercício proporciona uma evolução de pensamento, e que posteriormente aplicada a outras áreas apresenta soluções elegantes e práticas.

Palavras-chave: Geometria Plana, axiomática.

1. Introdução

Pitágoras, um dos mais antigos matemáticos conhecidos, costumava associar a geometria ao misticismo, uma vez que são de fato surpreendentes e fascinantes as relações que podemos deduzir de questões geométricas elementares. Seu teorema, que hoje conta com cerca de 50 demonstrações distintas, é um bom exemplo disso: uma simples relação que encerra *todos* os triângulos retângulos.

Seguindo esta linha, podemos também citar o famosíssimo problema de engenharia, proposto na ilha de Samos em 530 a.C., de construir um túnel dentro de uma montanha, que foi resolvido *inteiramente* por semelhança de triângulos, e na prática levou a um erro de apenas 1% de desvio no encontro das escavações (vide [1], página 79).

De fato, o estudo e exercício de geometria proporciona uma visão privilegiada na solução de problemas práticos e teóricos, além de descobertas motivantes para alunos, e até mesmo para professores. Resultados notáveis como “a circunferência de nove pontos”, “a reta de Euler”, “o teorema de Pappus” e “o teorema de Desargues”, formam uma coleção de exemplos cujos enunciados são tão intrigantes que muito impellem a vontade de conhecer todos os passos de suas demonstrações.

Apesar da Geometria Plana ser uma teoria já encerrada no século XIX, seu domínio é indispensável para o desenvolvimento de outras ciências, como a Física e a Engenharia. Na Física, encontra aplicações em outras geometrias mais elaboradas, como a Riemanniana [2], [3] e Lorentziana [4], [5]. Na Engenharia, um dos exemplos de aplicação da Geometria Plana é em “Árvores de Steiner”. Em redes de computadores, as árvores de Steiner são utilizadas na distribuição de vídeo, conferências multimídia que utilizam comunicação “multicast” para transmissão de dados [6], [7], [8], [9].

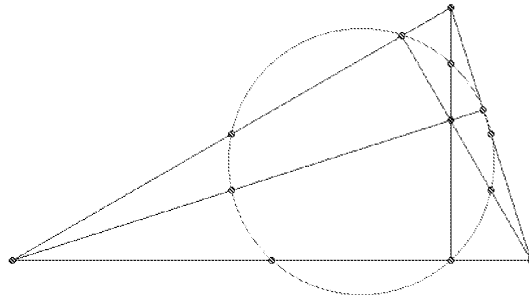


Figura 1. Circunferência de Nove Pontos.

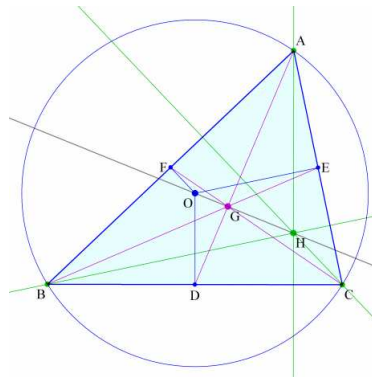


Figura 2. Reta de Euler.

Como já citado, nosso objetivo foi o estudo das ferramentas geométricas que permitiram compreender e reproduzir as demonstrações de resultados notáveis supracitados. Para tanto, recorreu-se à Geometria Axiomática, o que requer um grande exercício de lógica e de conceitos. De fato, tão somente apreciar ou admirar Matemática é insuficiente para dominá-la, e os verdadeiros profissionais da área destacam-se após superar os grandes desafios do raciocínio axiomático [1], [10], [11], [12], [13].

2. Teoremas Demonstrados

Teorema 1 (Circunferência de Nove Pontos):

A circunferência que passa pelos pés das perpendiculares baixadas dos vértices de qualquer triângulo sobre os lados opostos a eles, passa também pelos pontos médios dos lados, assim como pelos pontos médios dos segmentos que ligam os vértices ao ortocentro. Ela é chamada “Circunferência de Nove Pontos”.

Teorema 2 (Reta de Euler):

O circuncentro, o baricentro e o ortocentro de um triângulo são colineares. Além disso, o baricentro divide o segmento cujas extremidades são o circuncentro e o ortocentro na razão de $1 : 2$. A reta que contém esses três pontos notáveis do triângulo é chamada “Reta de Euler”.

3. Considerações Finais

Conclui-se que os resultados principais, apesar de representarem teoremas antigos e já conhecidos, são de grande complexidade e se fundamentam numa teoria axiomática. As demonstrações

obtidas são mais rigorosas do que as encontradas nas literaturas clássicas sobre o tema.

Portanto, a Geometria Plana é uma ciência viva, mas que necessita dedicação e raciocínio lógico. Assim, os resultados puderam ser aplicados na solução de problemas práticos em diferentes áreas de pesquisa.

Agradecimentos

Agradeço à minha família pelo apoio, ao CNPq pelo auxílio financeiro, ao Prof. Valério Ramos Batista que me ajudou e incentivou durante todo o período da Iniciação Científica e ao Prof. Marcio Fabiano Silva pelo auxílio dado quando necessário.

Referências

- [1] Rezende, E. e Queiroz, M.L. - *Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas*, Editora Unicamp: Campinas, (2000).
- [2] Poupaud, C. - *On the essential spectrum of Schrödinger operators on Riemannian manifolds*, *Mathematische Zeitschrift*, v 251 - p 20, (2005).
- [3] Raulot, S. - *Rigidity of compact Riemannian spin manifolds with boundary*, *Letters in Mathematical Physics*, v 86 - p 177, (2008).
- [4] Calvaruso, G. - *Einstein-like metrics on three-dimensional homogeneous Lorentzian manifolds*, *Geometriae Dedicata*, v 127 - p 99, (2007).
- [5] Calvaruso, G. and Kowalski, O. - *On the Ricci operator of locally homogeneous Lorentzian 3-manifolds*, *Central European Journal of Mathematics*, v 7 - p 124, (2009).
- [6] Fößmeier, U. and Kaufmann, M. - *Solving rectilinear Steiner tree problems exactly in theory and practice*, *Proc. 5th European Symp. on Algorithms* (1997), Springer-Verlag LNCS 1284.
- [7] X.-D. Hu, T.-P. Shuai, Xiaohua Jia and Mu-Hong Zhang - *Multicast routing and wavelength assignment in WDM networks with limited drop-offs*, *IEEE INFOCOM*, (2004).
- [8] Sahasrabudde, L. H. and Mukherjee, B. - *Multicast routing algorithms and protocols: a tutorial*, *IEEE Network* 14, (2000).
- [9] Warme, D., Winter, P. and Zachariasen, M. - *Exact algorithms for plane Steiner tree problems: a computational study*. Technical Report DIKU-TR-98/11, University of Copenhagen, (1998).
- [10] Barros, A. e Andrade, P - *Introdução à Geometria Projetiva*, XIII Escola de Geometria Diferencial, cap 11, DM-UFC (2004).
- [11] Fernandez, D. L. - *Elementos de Geometria*. Apostila, (2001).
- [12] Hartshorne, R. - *Geometry: Euclid and beyond*, Springer: New York, (2000).
- [13] Mod, L.F.A. e Ramos Batista, V. - *Teoremas Notáveis da Geometria Plana*, Notas de aula, (2009). url: <http://valerioramosbatista.googlepages.com/students.html> (acessado em: 27/07/2009).