Aplicação de Poincaré no estudo local de Sistemas Dinâmicos

Rodrigo Porcionato

Resumo

Uma equação da forma $F(t, x, x', \ldots, x^m) = 0$, onde a incógnita x é uma função da variável independente t e x^k denota a k-ésima derivada em relação a essa variável, é denominada equação diferencial ordinária.

Muitas leis gerais da Física, Biologia e Economia, por exemplo, encontram sua expressão natural em equações desse tipo. Ainda, inúmeras questões matemáticas são formuladas por equações diferenciais ordinárias ou se reduzem a elas.

Históricamente, os primeiros problemas envolvendo equações diferenciais surgiram em meados do século XVIII. O objetivo nessa época era buscar soluções explícitas para tais equações. No entanto, todas as técnicas inicialmente desenvolvidas para resolver as equações diferenciais foram feitas, principalmente, para equações diferenciais lineares, algo que, na prática, não era tão útil, pois muitos fenômenos naturais são regidos por equações diferenciais não lineares. Além disso, não era possível obter soluções explícitas para a maioria das equações diferenciais.

Motivado por este problema, o matemático francês Jules Henri Poincaré, por volta dos anos 1881, se preocupou em descrever, por meio de técnicas topológicas e geométricas, o comportamento de sistemas de equações diferenciais. Nasce aí a Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais e com ela uma nova área de pesquisa: os *Sistemas Dinâmicos*.

O presente trabalho tem por objetivo estudar a aplicabilidade de uma destas técnicas, a *Aplicação de Poincaré*, analisando as condições que o sistema dinâmico deve satisfazer para que seja possível sua construção e descrevendo tal construção. Como motivação para tanto, podemos destacar:

- A redução da dimensão do espaço de fase por meio da seção de Poincaré;

- Entendimento da dinâmica em vizinhanças de soluções periódicas onde pode-se citar, por exemplo, o fato de que a existência de soluções periódicas se reduz a encontrar pontos fixos da aplicação de Poincaré e a estabilidade de soluções periódicas se reduz a entender a diferencial dessa aplicação no respectivo ponto fixo;
- Entendimento da dinâmica em vizinhanças de outras soluções típicas tais como soluções homoclínicas e heteroclínicas.

Entre as dificuldades relacionadas a construção da aplicação de Poincaré de um dado sistema dinâmico, a mais destacada é a necessidade de que se conheça a geometria das soluções da EDO, visto que não existe um algoritmo para a construção da aplicação. Contudo, é demonstrado no trabalho como podemos obter métodos de construção da aplicação de Poincaré quando o sistema possui órbitas ou soluções periódicas.