Lista 7 - Bases Matemáticas

Funções - Parte 2

Função Composta, Inversa

1 — Dadas as funções $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \pi[\![x]\!]$[1], determine os domínios e as imagens das funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$.

2 — Para cada par de funções f, g abaixo encontre o domínio e as expressões de $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ f$ e $g \circ g$.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3$
$g : [1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{x-1}$

b) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -\frac{1}{x}$
$g : (-\infty, 2] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{2-x}$

c) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$
$g : \mathbb{R}\backslash\{2,3\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{(x-2)(x-3)}$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{sen}(x)$
$g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{x}$

3 — Denotando por $\imath$ a função identidade, mostre que para toda função f vale que:

a) $\imath \circ f = f$ e $f \circ \imath = f$

b) Se f é inversível, então $f \circ f^{-1} = \imath$ e $f^{-1} \circ f = \imath$
Em tempo, isso significa que a função identidade cumpre o papel de *elemento neutro* da operação de composição de funções.

4 — Para as seguintes funções $h(x)$, decomponha-a como compostas de funções mais simples

a) $h(x) = \operatorname{sen}(x + x^2)$

b) $h(x) = \operatorname{cosec}(\cos(x))$

c) $h(x) = \operatorname{sen}(\frac{\cos(x)}{x})$

d) $h(x) = \operatorname{sen}((\operatorname{sen}^7(x^7+1))^7)$

e) $h(x) = \sqrt{1-x^2}$

f) $h(x) = \operatorname{sen}(\cos(\frac{ax+b}{cx+d}))$

g) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}$

h) $h(x) = x^{x^x}$

i) $h(x) = e^{\sqrt{1+x}}$

j) $h(x) = \ln(2 + \frac{1}{x})$

k) $h(x) = 2e^{x+1}$

l) $h(x) = 2 + \dfrac{1}{\ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)}$

m) $h(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{3(x^3+1)}}$

5 — Para as funções abaixo encontre $f(x+2)$, $f(-x)$, $f(x+h)$ e $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, sendo $h \neq 0$:

a) $f(x) = x$

b) $f(x) = 3x + 4$

c) $f(x) = x^2$

d) $f(x) = x^2 - x$

e) $f(x) = x^3 + x^2$

6 — Determine a função inversa de cada uma das funções abaixo, atentando para os domínios e contradomínios:

a) $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$,
$f(x) = \sqrt{x}$

b) $f : (-\infty, 1] \to [0, +\infty)$,
$f(x) = x^2 - 2x + 1$

[1] Dado $x \in \mathbb{R}$, o número inteiro $[\![x]\!] := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ é maior inteiro menor ou igual a x. Este número é chamado de **parte inteira de** x.

c) $f : [-\frac{3}{4}, +\infty) \to [-\frac{1}{8} + \infty)$,
$f(x) = 2x^2 + 3x + 1$

d) $f : [-1, +\infty) \to (-\infty, 1]$,
$f(x) = 1 - \sqrt{x+1}$

7 — Para cada função abaixo, determine um domínio D que a torne inversível e expresse sua inversa:

a) $f : D \to [1, 4],\ f(x) = x^2$

b) $f : D \to [1, 4],\ f(x) = \sqrt{x}$

c) $f : D \to [-2, +\infty),\ f(x) = x^2 - 4x + 2$

d) $f : D \to [14, +\infty),\ f(x) = x^2 - 4x + 2$

8 — Para cada função abaixo, determine o contradomínio C que a torne inversível e expresse sua inversa:

a) $f : [1, 4) \to C,\ f(x) = 3x - 1$

b) $f : [-1, +\infty) \to C,\ f(x) = \sqrt{x+1}$

c) $f : [0, +\infty) \to C,\ f(x) = \sqrt{x} + 1$

d) $f : (-\infty, -\frac{3}{2}] \to C,\ f(x) = 2x^2 + x - 3$

e) $f : [-\frac{1}{4}, 1] \to C,\ f(x) = 2x^2 + x - 3$

9 — Para cada função abaixo, determine o domínio máximo e o contradomínio para que ela seja bijetora. Neste caso, encontre uma expressão analítica para f^{-1}.

a) $f(x) = \sqrt{x+1} - 2$

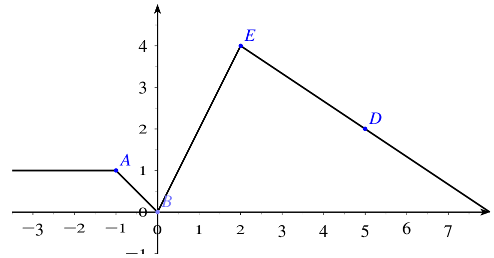
b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{1-5x}$

c) $f(x) = 2 + \dfrac{1}{\ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)}$

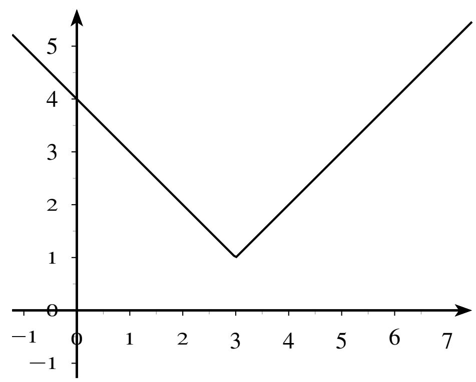
d) $f(x) = e^{e^{3(x^3+1)}}$

Gráfico, Transformações no Gráfico, Funções Modulares

10 — Encontre uma expressão para a função cujo gráfico é a curva abaixo:



11 — Dado o seguinte gráfico:



a) Se soubermos que o gráfico anterior é o gráfico de $f(x+1) + 2$ como é o gráfico de $f(x)$?

b) Se soubermos que o gráfico anterior é o gráfico de $|f(x)| + 1$ como poderia ser o gráfico de $f(x)$? (Forneça pelo menos duas respostas distintas)

c) Se soubermos que o gráfico anterior é o gráfico de $|f(x) + 1|$ como poderia ser o gráfico de $f(x)$? (Forneça pelo menos duas respostas distintas)

12 —

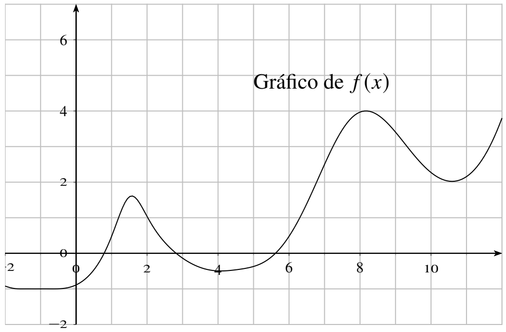
a) Como o gráfico de $f(|x|)$ está relacionado como o gráfico de $f(x)$?

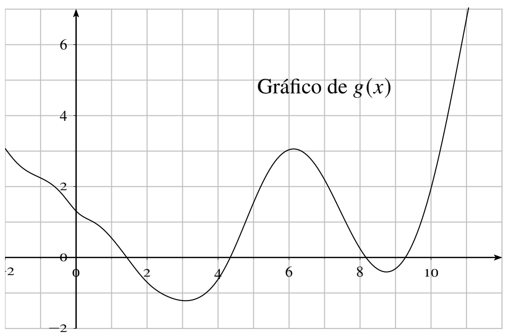
b) Esboce o gráfico de $f(x) = |x|^3$.

c) Esboce o gráfico de $f(x) = -|x|^5$.

d) Esboce o gráfico de $f(x) = \text{sen}(|x|)$

13 — Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções cujos gráficos estão apresentados a seguir





A partir desses gráficos, esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $2f(x)$

b) $-g(x)$

c) $f(-x)$

d) $f(|x|)$

e) $f(-|x|)$

f) $\frac{1}{2}g(x) + 1$

g) $-\frac{1}{2}g(x) + 1$

h) $-\frac{1}{2}|g(x)| + 1$

i) $f(\frac{1}{2}x)$

j) $||f(x)| - 1|$

14 — Esboce o gráfico das seguintes funções, utilizando o gráfico de uma função mais simples e aplicando as transformações apropriadas. Para cada uma dessas funções indique as intersecções com os eixos x e y, as regiões nas quais as funções são positivas, negativas, crescentes e decrescentes.

a) $f(x) = |2x| + 1$

b) $f(x) = (x + 3)^4$

c) $f(x) = (x + 3)^4 - 1$

d) $f(x) = |(x + 3)^4 - 1|$

e) $f(x) = |(x + 3)^4 - 1| - 1$

f) $f(x) = |x - 1| + 1$

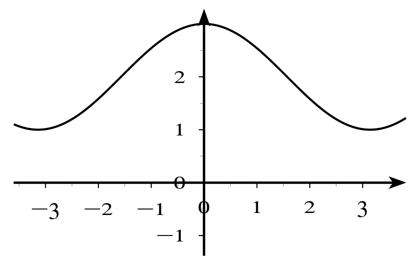
g) $f(x) = |(x - 4)^6 - 2|$

h) $f(x) = \sqrt{|x + 2|}$

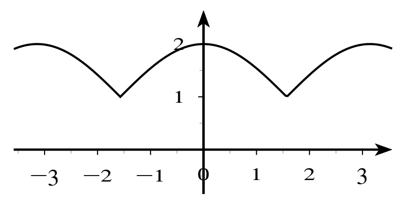
i) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 0 \\ \frac{x}{2} + 1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

j) $f(x) = \sqrt{-2x} - 2$

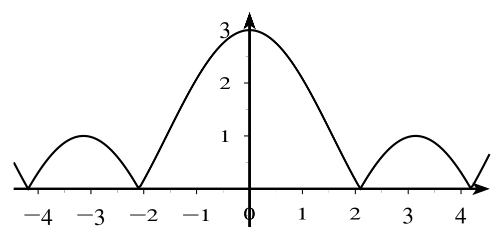
15 — Os seguintes gráficos foram obtidos a partir do grafico da função $f(x) = \cos(x)$ através de translações, homotetias e módulos. Qual função que representa cada um dos gráficos a seguir:



a)



b)



c)

16 — Faça os gráficos das seguintes funções modulares:

a) $f(x) = |x|$

b) $f(x) = |x| + |x - 1|$

c) $f(x) = |x| + |x - 1 + |x - 2||$

d) $f(x) = |x^2 - x| + 3$

e) $f(x) = |x^2 - x| + |x^2 + 1|$

17 — Sabendo que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é par, o que podemos concluir sobre funções: $2f(x)$, $f(x)+3$, $f(x-1)$ e $|f(x)|$? E se f for uma função ímpar?

Respostas dos Exercícios

1 $\text{Dom}\, f \circ g = \mathbb{R}$, $\text{Im}\, f \circ g = \{0\}$; $\text{Dom}\, g \circ f = \mathbb{R}$, $\text{Im}\, g \circ f = \{-\pi, 0, \pi\}$;

2 b.) $(f \circ g)(x) = \frac{-1}{\sqrt{2-x}}$; $(f \circ f)(x) = x$; $(g \circ f)(x) = \sqrt{2 + \frac{1}{x}}$; $(g \circ g)(x) = \sqrt{2 - \sqrt{2-x}}$;
d.) $(f \circ g)(x) = \text{sen}\, \sqrt{x}$; $(f \circ f)(x) = \text{sen}(\text{sen}\, x)$; $(g \circ f)(x) = \sqrt{\text{sen}\, x}$; $(g \circ g)(x) = \sqrt{\sqrt{x}}$;

4 a.) $h = g \circ f$, onde $f(x) = x + x^2$, $g(x) = \text{sen}\, x$;
d.) $h = f \circ g \circ g \circ f \circ j \circ g$, onde $f(x) = \text{sen}\, x$, $g(x) = x^7$, $j(x) = x + 1$;
h.) $h = f \circ g$, onde $f(x) = e^x$, $g(x) = x^x \ln x$

5 a.) $f(x) = x$, $f(x+2) = x+2$, $f(-x) = -x$ e $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = 1$

6 b.) $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$
c.) $f^{-1}(x) = \frac{-3+2\sqrt{2(1-y)}}{4}$

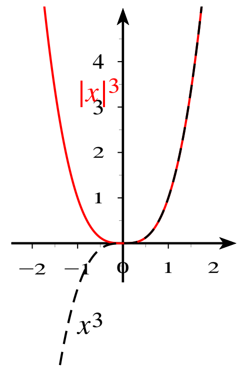
7 a.) $D = [1, 2]$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ou $D = [-2, -1]$, $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$
b.) $D = [1, 16]$, $f^{-1}(x) = x^2$
d.) $D = (-\infty, -2]$, $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{2-x}$ ou $D = [6, +\infty)$, $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{2-x}$

8 c.) $C = [1, +\infty)$, $f^{-1}(x) = (x-1)^2$
d.) $C = [0, +\infty)$, $f^{-1}(x) = \frac{-1-\sqrt{25+8x}}{4}$
e.) $C = [-\frac{25}{8}, 0]$, $f^{-1}(x) = \frac{-1+\sqrt{25+8x}}{4}$

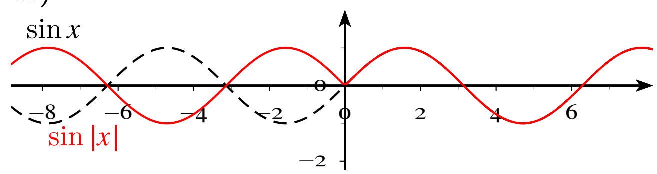
10 O gráfico corresponde à função

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x < -1 \\ -x & \text{se} \quad -1 \le x < 0 \\ 2x & \text{se} \quad 0 \le x < 2 \\ \frac{-2x+16}{3} & \text{se} \quad 2 \le x \end{cases}$$

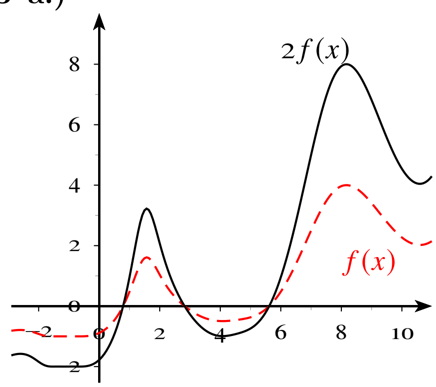
12 a.) O gráfico de $f(|x|)$ coincide com o gráfico de $f(x)$ para $x \ge 0$, isto é, do lado direito do eixo y. Para $x < 0$, o gráfico de $f(|x|)$ é a reflexão do gráfico de $f(x)$ relativamente ao eixo y.
b.)



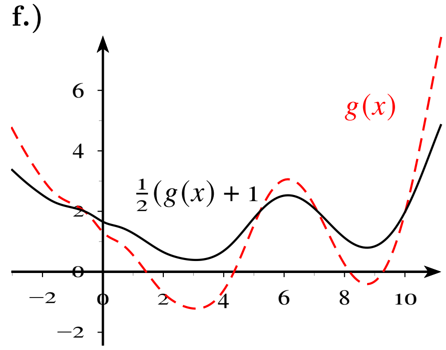
d.)



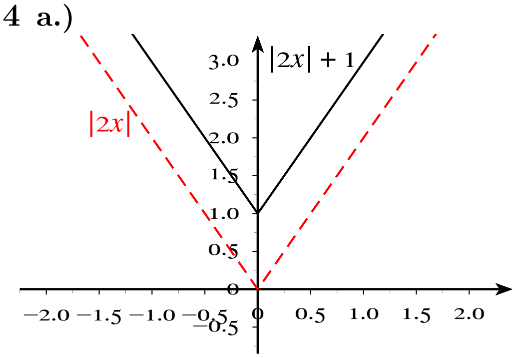
13 a.)



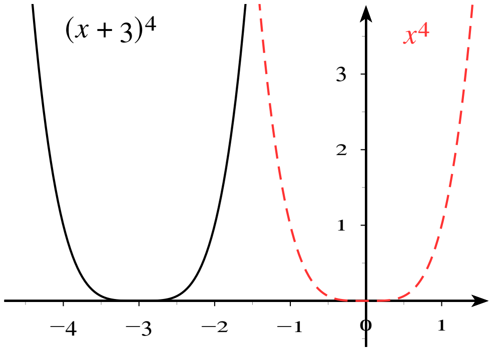
f.)



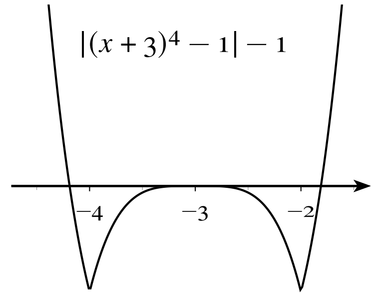
14 a.)



b.)



e.)



15 **a.)** $\cos(x) + 2)$

b.) $|\cos(x)| + 1$

c.) $|2\cos(x) + 1|$