

Lista 9 - Bases Matemáticas

Funções - Parte 4 - Funções Exponenciais e Logarítmicas

1 — Esboce o gráfico das seguintes funções, utilizando o gráfico de uma função mais simples e aplicando as transformações apropriadas. Para cada uma dessas funções indique as intersecções com os eixos x e y , as regiões nas quais as funções são positivas, negativas, crescentes, decrescentes.

- $f(x) = 2^{(x-\pi)}$
- $f(x) = 3 \cdot 2^{(x-\pi)}$
- $f(x) = \frac{1}{2}^{(x+\pi)}$
- $f(x) = 2^{(x-\pi)} - 5$
- $f(x) = 5^{|x|}$
- $f(x) = 5^{|x+2|}$
- $f(x) = \frac{1}{3}^{x+1} + 2$
- $f(x) = \frac{1}{3}^{|x|} - 2$
- $f(x) = |3^x - 5|$
- $f(x) = |3^{-x} - 2|$
- $f(x) = e^{|x-2|}$

2 — Esboce o gráfico das funções $f(x)$ e $g(x)$ no mesmo sistemas de coordenadas cartesianas:

- $f(x) = 3^x$ e $g(x) = 3^{-x}$
- $f(x) = h^{-1}(x)$ com $h(x) = 3^x$ e $g(x) = 3^{-x}$.

3 — A explosão da usina de Chernobil em 1986 lançou aproximadamente 1000 quilogramas do elemento radioativo cézio 137 na atmosfera. Sabendo que o cézio 137 possui uma meia vida de 30 anos, ou seja, a cada 30 anos a quantidade de cézio 137 cai pela metade.

- Escreva a função que descreve a massa de cézio na atmosfera em função do tempo.

- Determine em quanto tempo a massa de cézio na atmosfera reduzirá a 1kg.

4 — Uma lata de cerveja está a uma temperatura de $T_0 = 25^\circ\text{C}$. Em seguida, ela é posta numa geladeira cuja temperatura interna era $T_g = 5^\circ\text{C}$. A partir daquele momento, a temperatura dentro da lata de cerveja passou a ser dada pela função $T(t) = T_g + (T_0 - T_g)2^{-bt}$, em que t é o tempo (em horas) e b é uma constante real. Sabendo que, depois de manter a lata por 2 horas na geladeira, a temperatura do líquido em seu interior atingiu 15°C , determine a constante b e escreva a fórmula de $T(t)$; esboce o gráfico de $T(t)$ para $t \in [0, 10]$.

5 — Sabe-se que um artefato de madeira de uma tumba contém 65% do carbono-14 presente na madeira de árvores vivas. Há quantos anos a árvore de onde foi retirada a madeira utilizada para a fabricação desse artefato foi cortada? (A meia vida do carbono-14 é 5730 anos).

6 — Demonstre as seguintes propriedades de funções logarítmicas:

- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ para quaisquer $0 < a \neq 1$, $x, y > 0$.
- $\log_a y^c = c \log_a y$ para quaisquer $0 < a \neq 1$, $y > 0$ e $c \in \mathbb{R}$.

7 — Determine o domínio máximo das seguintes funções:

- $f(x) = \log 1 + x^2$
- $f(x) = \log 1 - x^2$
- $f(x) = \log \frac{1+x}{x}$

d) $f(x) = \log \cos(x)$

8 — Esboce os gráficos das seguintes funções:

a) $f(x) = \log(x + 1)$

b) $f(x) = \log x^2$

c) $f(x) = \log -x$

d) $f(x) = \log |x|$

e) $f(x) = \log_3(x - 2)$

f) $f(x) = \log_2(|x|)$

g) $f(x) = \log_2(2x - |x - 1|)$

h) $f(x) = |\ln x|$

i) $f(x) = \log(|x - 1|)$

9 — Use as propriedades do logaritmo para expandir as expressões abaixo o máximo possível:

a) $\log_9 9x$

b) $\log_9 \frac{9}{x}$

c) $\log_4 \frac{64}{\sqrt{x+1}}$

d) $\log \sqrt[3]{\frac{x^2 y^3}{25}}$

10 — Use as propriedades do logaritmo para condensar as expressões abaixo o máximo possível:

a) $\frac{1}{3}(\log_4(x) - \log_4(y))$

b) $\frac{4}{3}(\log_4(x) - 2 \log_4(y))$

c) $4 \log x + 7 \log x + \log z$

11 — Na expansão de $\log \sqrt[3]{\frac{x^2 y^3}{25}}$ encontramos a expressão $\log y + \frac{2}{3}(\log x - 1) + \alpha \log 2$. Determine α .

12 — Resolva, em \mathbb{R} , as seguintes equações:

a) $10^x = 15$

b) $2^{2x} + 2^x - 12 = 0$

c) $5^{2x+3} = 3^{x-1}$

d) $\log_5(x - 7) = 2$

e) $\log_2(\sqrt{x+3}) = 1$

f) $\log_2(x - 3) + \log_2(x) - \log_2(x + 2) = 2$

g) $2^{x^2+5} + 2^4 = 144$

h) $e^{2x} + 2e^x - 8 = 0$

i) $\ln(x - 1)^2 = 0$

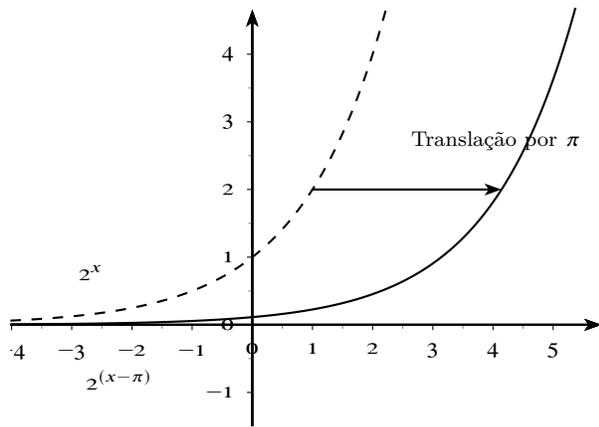
j) $\log_2(8x) = 6 \log_8(2x) + 2$

13 — O pH dos vinhos varia entre 2,8 e 3,8. Se o pH do vinho é muito alto, digamos, 4,0 ou acima, o vinho se torna instável e adquire gosto pouco marcante. Um certo vinho tinto francês tem pH de 3,2 e um certo vinho branco italiano tem pH de 2,9. Qual dos dois vinhos possui concentração mais baixa de íons de hidrogênio?

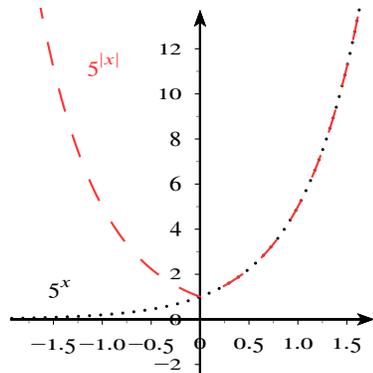
O pH é definido como sendo o oposto do logaritmo da concentração dos íons $[H^+]$ na base 10, isto é, $\text{pH} = -\log[H^+]$.

Respostas dos Exercícios

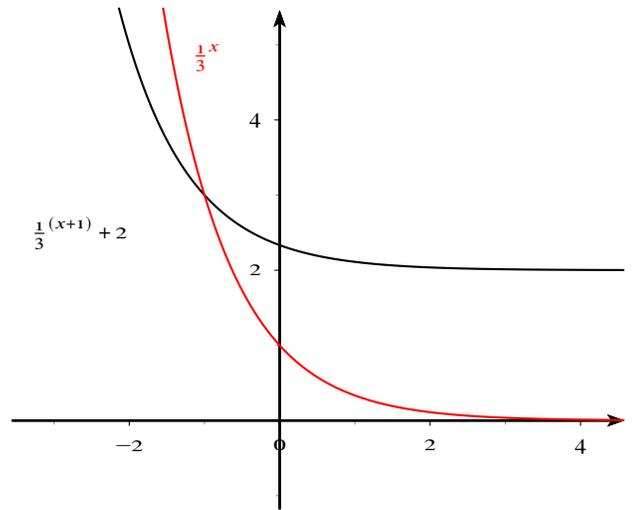
1 a.)



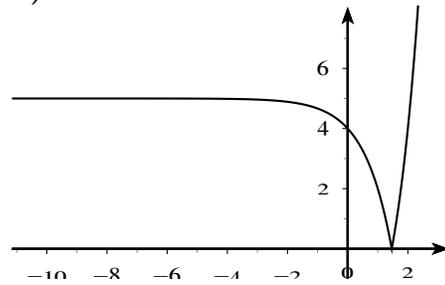
e.)



g.) O gráfico de $\frac{1}{3}^{(x+1)} + 2$ é obtido transladando o gráfico de $\frac{1}{3}^x$ uma unidade para a esquerda e duas unidades para cima.



i.)



7 a.) \mathbb{R}

b.) $-1 < x < 1$

c.) $x < -1$ ou $x > 0$

d.) O domínio é a união dos intervalos da forma $[-\pi/2 + 2 * k * \pi, \pi/2 + 2 * k * \pi]$ com $k \in \mathbb{N}$.

8 b.) Dica: $\log x^2 = 2 \log x$.

9 a.) $1 + \log_9 x$

b.) $1 - \log_9 x$

d.) $\log(y) + \frac{2 \log(x)}{3} - \frac{2 \log(5)}{3}$

10 a.) $\log_4 \left(\frac{x}{y} \right)^{\frac{1}{3}}$

12 a.) $\log_{10} 15$

b.) Dica: faça $t = 2^x$.