Lista 1 - Cálculo de Probabilidades

Distribuição de Variáveis e Vetores Aleatórios

Função Distribuição Acumulada de uma V.a.

1 — Dada a função de distribuição acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 1 \\ 0,1 & \text{se} \quad 1 \leq x < 2 \\ 0,3 & \text{se} \quad 2 \leq x < 3 \\ 0,7 & \text{se} \quad 3 \leq x < 4 \\ 0,8 & \text{se} \quad 4 \leq x < 5 \\ 1 & \text{se} \quad 5 \leq x \end{cases},$$

a) Calcule a função de probabilidade da variável cuja f.d.a. é $F(\cdot)$.
b) Calcule ainda o valor esperado e a variância de X.
c) Determine também as seguintes probabilidades:

$$\mathbf{P}(1 < X \leq 2), \mathbf{P}(1 \leq X < 2),\ \mathbf{P}(X > 3),$$

$$\mathbf{P}(X \leq 4).$$

2 — Seja T uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade dada por

$$f(t) = \frac{5}{4(t+1)},\ 0 \leq t \leq 4.$$

Determine a função distribuição acumulada de T.

3 — Seja X uma variável aleatória discreta com

$$\mathbf{P}(X = 0) = 0,25,$$

$$\mathbf{P}(X = 1) = 0,125,$$

$$\mathbf{P}(X = 2) = 0,125,$$

e

$$\mathbf{P}(X = 3) = 0,5.$$

a) Faça o gráfico da função de distribuição acumulada,
b) Encontre a função densidade de X,
c) Determine as seguintes probabilidades:

$$\mathbf{P}(0 < X < 1),\ \mathbf{P}(X \leq 2),\ \mathbf{P}(X > 3),$$

$$\mathbf{P}(X > 2,5).$$

4 — Seja X uma variável aleatória com função de distribuição acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases},$$

determine as seguintes probabilidades:

a) $\mathbf{P}(X = 3)$;
b) $\mathbf{P}(X = t), t \in \mathbb{R}$;
c) $\mathbf{P}(1 < X \leq 2)$;
d) $\mathbf{P}(1 \leq X < 2)$;
e) $\mathbf{P}(X > 3)$
f) $\mathbf{P}(X > t)$ para $t > 0$;
g) $\mathbf{P}(X > 5 | X > 2)$;
h) $\mathbf{P}(X > t + s | X > t)$ para $t, s > 0$.

5 — Dada a função de distribuição acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 1 \\ \frac{x}{4} & \text{se} \quad 1 \leq x < 2 \\ 0,5 & \text{se} \quad 2 \leq x < 3 \\ 0,7 & \text{se} \quad 3 \leq x < 4 \\ \frac{(x-4)^2 + 4}{5} & \text{se} \quad 4 \leq x < 5 \\ 1 & \text{se} \quad 5 \leq x \end{cases},$$

de uma v.a. X, determine as seguintes probabilidades:

$$\mathbf{P}(X = 1),\ \mathbf{P}(X = 2),\ \mathbf{P}(X = 3),$$

$$\mathbf{P}(X = 4),\ \mathbf{P}(X = 5),\ \mathbf{P}(2 < X \leq 4),$$

$$\mathbf{P}(2 \leq X < 4),\ \mathbf{P}(X > 3),\ \mathbf{P}(X \leq 4).$$

Distribuição Conjunta

6 — Sorteamos 3 bolas de uma urna com 4 bolas amarelas e 6 bolas azuis e 2 bolas verdes. Seja X o total de bolas amarelas sorteadas e Y o total de bolas azuis sorteadas. Nestas condições, encontre a função de probabilidade conjunta de X e Y nos casos em que

a) o sorteio é feito sem reposição,

b) o sorteio é feito com reposição.

7 — No exercício anterior, defina as variáveis aleatórias $X_i = 1$ se a i—ésima bola sorteada é amarela, e $X_i = 0$ caso contrário, $i = 1, 2, 3$. Encontre a função de probabilidade conjunta de X_1, X_2, X_3 nos casos em que

a) o sorteio é feito sem reposição,

b) o sorteio é feito com reposição.

8 — Uma caixa com 5 lâmpadas possui 2 com defeito. As lâmpadas serão testadas uma a uma, até que todas as defeituosas sejam identificadas. Seja N_1 o total de testes realizados até que a primeira lâmpada defeituosa seja identificada, e N_2 o total de testes até a segunda lâmpada ser identificada.

a) Encontre a função de probabilidade conjunta de N_1 e N_2;

b) Encontre a função de probabilidade marginal de N_1;

c) Encontre a função de probabilidade marginal de N_2.

9 — Um certo experimento consiste em sortear uma bola em uma urna, observar sua cor, e devolver a bola para a urna junto com outra bola da mesma cor. Realizamos este experimento 3 vezes em uma urna que contém, inicialmente, n bolas azuis e m bolas amarelas.
Denote por X_i e Y_i, $i = 1, 2, 3$ o total, respectivamente, de bolas azuis e amarelas na urna após i repetições do experimento.

a) Encontre as funções de probabilidade conjunta de X_i, Y_i, para cada $i = 1, 2, 3$.

b) Calcule

$$\mathbf{P}((X_{i+1}, Y_{i+1}) = (k+1, l) | (X_{i+1}, Y_{i+1}) = (k, l))$$

e

$$\mathbf{P}((X_{i+1}, Y_{i+1}) = (k, l+1) | (X_{i+1}, Y_{i+1}) = (k, l))$$

para cada $i = 1, 2$.

10 — A função de densidade conjunta de X e Y é dada por

$$f(x, y) = c(y^2 - x^2)e^{-y}, \ -y \leq x \leq y, \ y > 0.$$

a) Calcule o valor de c;

b) Encontre as densidades marginais de X e Y;

c) Determine $\mathbf{E}[X]$.

11 — A função de densidade conjunta de X e Y é dada por

$$f(x, y) = \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right), \ 0 < x < 1, \ 0 < y < 2.$$

a) Verifique que $f(x, y)$ é de fato uma função densidade conjunta;

b) Encontre as densidades marginais de X e Y;

c) Determine $\mathbf{E}[X]$ e $\mathbf{E}[Y]$;

d) Determine $\mathbf{P}(X > Y)$;

e) Determine $\mathbf{P}(Y > \frac{1}{2} | X < \frac{1}{2})$;

12 — Dadas variáveis aleatórias X e Y com função densidade conjunta dada por

$$f(x, y) = e^{-(x+y)}, \ x > 0, \ y > 0,$$

encontre a função densidade de probabilidade das variáveis

a) $S = X + Y$

b) $V = X/Y$

c) $W = \max\{X, Y\}$