Lista 2 - Cálculo de Probabilidades

Variáveis Independentes e Distribuição Condicional

Variáveis Independentes

1 — A função de probabilidade conjunta de X e Y é dada por

$$p(1,1) = \frac{1}{8} \quad p(1,2) = \frac{1}{4}$$
$$p(2,1) = \frac{1}{8} \quad p(2,2) = \frac{1}{2}$$

a) Encontre as funções de probabilidade marginais de X e Y;

b) X e Y são independentes?

c) Econtre as funções de probabilidade de $X+Y$, $X-Y$, XY e X/Y.

2 — Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição de Bernoulli de parâmetro $p \in (0,1)$. Mostre por indução que $X_1 + \cdots + X_n \sim \mathrm{Binomial}(n,p)$.

3 — Rolamos um dado não viesado repetidas vezes. Denote por N o total de lançamentos necessários até observarmos um valor diferente de 6, e denote por X o valor observado neste lançamento.

a) O que diz a sua intuição? N e X devem ser independentes?

b) Encontre $\mathbf{P}(N = k, X = i)$, $i = 1,2,3,4,5$ e $k = 1,2,3,4,\ldots$.

c) Encontre as funções de probabilidade marginais de N e X.

d) Verifique se N e X são independentes.

4 — Mostre que se $N \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ e $M \sim \mathrm{Poisson}(\mu)$ independentes, então $N + M \sim \mathrm{Poisson}(\lambda+\mu)$. Lembre-se que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

5 — O total de chamadas que passam por uma torre de celular ao longo de uma hora é uma variável aleatória N com distribuição de Poisson de média $\lambda > 0$. Para tentar distinguir os tipos de chamadas recebidas, considere que cada chamada tem probabilidade p de ser local e $1-p$ de ser internacional ou interurna. Seja N_1 o total de chamadas locais recebidas pela central em uma hora e N_2 o total de chamadas internacionais ou interurbanas recebidas pela torre no mesmo período. Para mostrar que N_1 e N_2 são independentes, e tem distribuição de Poisson de média λp e $\lambda(1-p)$, respectivamente, siga os passos abaixo.

a) Mostre que

$$\mathbf{P}(N_1 = i, N_2 = j) = \mathbf{P}(N_1 = i, N_2 = j | N = i+j)\mathbf{P}(N = i+j)$$

b) Argumente que

$$\mathbf{P}(N_1 = i, N_2 = j | N = i+j) = \binom{i+j}{i} p^i (1-p)^j$$

c) Encontre a função de probabilidade conjunta de N_1 e N_2;

d) Determine as funções de probabilidade marginais de N_1 e N_2 e conclua o resultado.

6 — De acordo com o Centro Nacional para Estatísticas de Saúde dos EUA, $25,2\%$ dos homens e $23,6\%$ das mulheres nunca tomam café da manhã. Suponha que amostras aleatórias de 200 homens e 200 mulheres sejam escolhidas. Obtenha a probabilidade de que

a) pelo menos 110 dessas 400 pessoas nunca tomem café da manhã;

b) o número de mulheres que nunca tomam café da manhã seja pelo menos tão grande quanto o número de homens que nunca tomam café da manhã.
Dica: Use a aproximação normal para a distribuição binomial.

7 — Um vetor aleatório (X, Y) é dito uniformemente distribuído em uma região limitada $R \subset \mathbb{R}^2$ do plano se para alguma constante $c \in \mathbb{R}$, sua densidade conjunta é dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & \text{se } (x, y) \in R \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Mostre que $1/c =$área da região R;
b) Mostre que se $R = [a, b] \times [c, d]$ então X, Y são independentes.

8 — Se (X, Y) é uniformemente distribuído em um quadrado de lado 2, centrado em $(0, 0)$ (ou seja, $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$ no exercício anterior), calcule $\mathbf{P}(X^2 + Y^2 \leq 1)$.

9 — Sejam X, Y variáveis aleatórias com função densidade conjunta dada por

$$f(x, y) = xe^{-(x+y)},\ x > 0, y > 0,$$

e T, S variáveis aleatórias com densidade conjunta dada por

$$f(t, s) = \frac{4}{3} te^{-(t+s)},\ t > 0, 0 < s < t.$$

a) As variáveis X, Y são independentes?
b) E as variáveis S, T?

10 — No exercício anterior, encontre as funções densidade de probabilidade das variáveis X, Y, T e S.

11 — Sejam X e Y variáveis i.i.d. com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$. Determine a densidade de $X + Y$.

12 — A venda bruta diária de um restaurante, em milhares de reais, é normalmente distribuída com média 10 e desvio padrão 2. Calcule a probabilidade de que

a) a venda bruta total em dois dias exceda 23 mil reais;
b) a venda diária exceda 8 mil reais em ao menos dois dias, durante três dias consecutivos.

Para resolver este problema você precisa fazer hipóteses de independência. Que hipóteses são essas?

13 — Dada uma variável aleatória contínua e positiva T com densidade $f(t),\ t > 0$, definimos a taxa de risco $\lambda_T(t)$ de T por

$$\lambda_T(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)},$$

onde $F(t) = \mathbf{P}(T \leq t)$ é a função distribuição acumulada de T.
Se T representa o tempo de falha de algum componente, a taxa de risco pode ser interpretada como a taxa com a qual ocorre a falha, dado que o componente ainda não falhou no instante t. Ou seja,

$$\mathbf{P}(t < T < t + dt | T > t) \approx \lambda_T(t)dt.$$

Considere agora variáveis $T_1, \cdots, T_n$ positivas e independentes, com funções densidade dadas respectivamente por $f_1(t), \cdots, f_n(t)$, e defina $W = \min\{T_1, \cdots, T_n\}$.
Com estas informações em mente, faça o que se pede.

a) Encontre a função distribuição acumulada de W em termos da funções distribuição acumuladas de $T_1, \cdots, T_n$;
b) Mostre que a taxa de risco $\lambda_W(t)$ de W é dada por

$$\lambda_W(t) = \lambda_{T_1}(t) + \cdots + \lambda_{T_n}(t).$$

c) Repita os itens anteriores no caso em que

$$T_i \sim \mathrm{Exponencial}(\lambda_i),$$

$i = 1, \ldots, n$.
(Se tiver dificuldade, faça primeiro o caso $n = 2$)

14 — Uma máquina funciona normalmente enquanto 2 de suas 3 baterias esteja com carga. Os tempos de carga em dias das 3 baterias são independentes com densidade de probabilidade $f(t) = te^{-t}, t > 0$. Seja $N(t)$ o total de baterias funcionando após t dias, e T o tempo de funcionamento da máquina.

a) Encontre a função de probabilidade de $N(t)$
b) Encontre a densidade de T

Distribuição Condicional

15 — Dois dados não viciados são rolados. Suponha que X e Y representem, respectivamente, o maior e o menor valor obtido.

a) Encontre a função de probabilidade condicional de X dado Y;
b) X e Y são independentes? Por quê?

16 — Um dado honesto é rolado. Chame o resultado de X. A seguir sorteamos aleatoriamente um número no conjunto $\{1, \ldots, X\}$. Seja Y o número sorteado.

a) Determine a função probabilidade condicional de Y dado $X = k$, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
b) Determine a função de probabilidade conjunta de X e Y.
c) Determine a função de probabilidade condicional de X dado $Y = i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

17 — Um dado honesto é rolado. Chame o resultado de X. A seguir lançamos um moeda X vezes. Seja Y o total de caras.
a) Determine a função probabilidade condicional de Y dado $X = i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
b) Determine a função de probabilidade conjunta de X e Y,

18 — A densidade conjunta de X e Y é dada por

$$f(x, y) = xe^{-x(y+1)}, x, y > 0.$$

a) Determine a densidade condicional de X dado $Y = y$;
b) Determine a densidade condicional de Y dado $X = x$;
c) Determine a densidade de $Z = XY$.

19 — A densidade conjunta de X e Y é dada por

$$f(x, y) = c(x^2 - y^2)e^{-x},\ x > 0, y > -x.$$

Determine a densidade condicional de Y dado $X = x$.

20 — Uma companhia de seguros trabalha com a hipótese de que o total N de acidentes sofrido por um segurado ao longo de um ano segue uma distribuição de Poisson de parâmetro W, onde W é uma variável aleatória com distribuição Gama de parâmetros k, β. Ou seja, W tem densidade

$$f(w) = w^{k-1}e^{-\beta w}\frac{(\beta t)^k}{(k-1)!}.$$

a) Determine a probabilidade de um segurado sofrer N acidentes em seu primeiro ano de seguro. Ou seja, calcule $\mathbf{P}(N = n)$;
b) Determine a densidade condicional do parâmetro W dado que o segurado sofreu n acidentes ao longo de um ano.

21 — O chamado processo de Poisson em uma região $R \subset \mathbb{R}^2$ limitada pode ser construída da seguinte maneira.

- primeiro sorteamos o total N de pontos a serem distribuídos em R, onde N será uma variável de Poisson de parâmetro $\lambda > 0$;
- se $N = n$ distribuímos n pontos independentes e com distribuição uniforme em R.

O conjunto de pontos obtidos é conhecido como Processo de Poisson em R.
Dada agora uma região $A \subseteq R$, denote por M o total de pontos do processo que estão dentro de A. Defina então $p = \text{área}(A)/\text{área}(R)$, e faça o que se pede.
a) Determine a distribuição condicional de M dado $N = n$;
b) Encontre a função de probabilidade conjunta de M e N;
c) Mostre que $M \sim \mathrm{Poisson}(p\lambda)$.

(Dica: Note que

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{x^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{j!} = e^x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.)