Lista 0 - Cálculo de Probabilidades

Probabilidade Básica e Variáveis Aleatórias

1 — Um sistema é formado por 5 componentes, cada uma das quais está em funcionamento ou com falha. Considere o experimento que consiste em observar o estado de cada componente. Assuma que o resultado do experimento é dado por um vetor $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, onde x_i é igual a 1 se a i-ésima componente está funcionando e igual a 0 caso contrário.

a) Qual a cardinalidade (número de elementos) do espaço amostral deste experimento?

b) Assuma que o sistema estará em funcionamento caso as componentes 1 e 2 estejam funcionando, ou se as componentes 3 e 4 estão funcionando, ou se as componentes $1, 3$ e 5 estão funcionando. Seja W o evento em que o sistema está funcionando. Especifique os elementos de W.

c) Seja A o evento em que as componentes 4 e 5 falham. Qual a cardinalidade deste evento?

d) Escreva todos os elementos do evento $A \cap W$. Como podemos descrever tal evento?

2 — Sejam E, F e G três eventos. Usando tais eventos e as operações de conjuntos ($\cup, \cap$,complemento,...), encontre uma expressão para os seguintes eventos:

a) Dos 3 eventos, apenas o evento E ocorre.

b) Os eventos E e G ocorrem mas não o evento F.

c) Pelo menos um dos eventos ocorre.

d) Pelo menos dois dos eventos ocorrem.

e) Os três eventos ocorrem.

f) Nenhum dos eventos ocorre.

g) No máximo, um dos eventos ocorre.

h) No máximo, dois dos eventos ocorrem.

i) Exatamente dois dos eventos ocorrem.

j) No máximo, três dos eventos ocorrem.

3 — Em uma certa comunidade, 36% das famílias possuem um cachorro. Além disso, 22% das famílias que possuem um cachorro são donas de um gato também. Sabe-se, também, que 30% das famílias na comunidade possuem um gato. Qual

a) a probabilidade de que uma família escolhida aleatoriamente seja dona de um gato e de um cachorro?

b) a probabilidade condicional de que família escolhida aleatoriamente seja dona de um cachorro dado que é dona de um gato?

4 — Uma urna contém inicialmente 5 bolas brancas e 7 bolas negras. Toda vez que uma bola é retirada, sua cor é registrada e é substituída, na urna, por duas bolas da mesma cor. Calcule a probabilidade de que

a) As primeiras duas bolas retiradas são negras e as outras duas são brancas;

b) Entre as primeiras 4 bolas retiradas há exatamente duas negras.

5 — Um total de 46% dos eleitores de uma certa cidade se declaram Independentes, enquanto que 30% se declaram Liberais e 24% se declaram Conservadores. Em uma eleição recente, 35% dos Independentes, 62% dos Liberais e 58% dos Conservadores votaram. Um eleitor é escolhido aleatoriamente.

a) Qual a probabilidade desta pessoa ter votado na eleição? Dado que esta pessoa votou na eleição local,

qual a probabilidade de que seja

b) Independente;

c) Liberal;

d) Conservador.

e) Qual a porcentagem de eleitores que participaram da eleição local?

6 — A urna I contém 2 bolas brancas e 4 bolas vermelhas, enquanto que a urna II contém 1 bola branca e 1 bola vermelha. Uma bola é escolhida aleatoriamente da urna I e colocada na urna II. Logo, uma bola é escolhida aleatoriamente da urna II. Qual

a) a probabilidade de que a bola escolhida da urna II seja branca?
b) a probabilidade condicional de que a bola transferida seja branca dado que uma bola branca foi escolhida da urna II?

7 — Um modelo simplificado para a variação do preço de uma mercadoria consiste em supor que a cada dia o preço aumenta em uma unidade com probabilidade p e diminui em uma unidade com probabilidade $1-p$. Assuma que as variações correspondentes a diferentes dias são independentes.

a) Qual a probabilidade de que, após 2 dias, o preço seja o mesmo?
b) Qual a probabilidade de que, após 3 dias, o preço tenha aumentado em uma unidade monetária?
c) Dado que, após 3 dias, o preço aumentou em uma unidade monetária, qual a probabilidade de ter aumento no primeiro dia?

8 — Um livro de jogos de azar recomenda a seguinte "estratégia de vitória"para o jogo de roleta: aposte R$ 1,00 no vermelho. Se der vermelho, pegue o lucro de R$1,00 e desista. Se o vermelho não aparecer e você perder a aposta, faça apostas adicionais de R$ 1,00 no vermelho em cada um dos próximos dois giros da roleta e então desista. Se X representa seu lucro quando você sair da mesa,

a) determine $\mathbf{P}[X > 0]$
b) você está convencido de que a estratégia é de fato uma "estratégia de vitória"? Explique a sua resposta.
c) Calcule $\mathbf{E}[X]$ e $\mathbf{Var}[X]$.

   Observação: No jogo de Roleta um pequena bola é jogada em uma roleta giratória com 18 casas vermelhas, 18 pretas e duas verdes. Quando a roleta para de girar a bola cai em uma das casas. Antes da roleta parar um jogador deve apostar algo sobre o resultado, como por exemplo a cor da casa onde vai parar. Se ele aposta que a bola cairá em uma casa vermelha ele pega de volta o que apostou e ganha a mesma quantia como prêmio, caso contrário ele perde o que apostou.

9 — Um bit (0 ou 1) de informação é transmitido por um canal com ruído. Seja p a probabilidade de que seja erradamente recebido. Para melhorar a transmissão uma alternativa é utilizar um decodificador de maioria de dois em três, ou seja, enviar de forma independente 3 vezes a mesma informação registrando como resultado aquela que foi recebida pelo menos duas vezes.
Dado N o total de bits corretamente recebidos em um decodificador de maioria de 2 em 3, faça o que se pede.

a) Para que valores de p temos $\mathbf{E}[N] > 1$?
b) Para quais valores de p o decodificador de maioria de dois em três tem maior probabilidade de transmitir corretamente que a transmissão de única tentativa?

10 — Uma urna possui 4 bolas vermelhas, 4 bolas verdes e 2 amarelas. Usando esta urna, faremos dois experimentos aleatórios. No primeiro sortearemos 2 bolas, sem reposição. No segundo sortearemos um total de 100 bolas, agora com reposição.
Seja Y o total de bolas vermelhas sorteadas no **primeiro experimento**, e X o total de bolas amarelas sorteadas no **segundo experimento**.
Nestas condições, faça o que se pede.

a) Determine a função probabilidade de Y.
b) Determine a média e a variância de Y.
c) Determine a distribuição de X.
d) Determine a média e variância de X.

11 — Joga-se um dado equilibrado repetidas vezes até observarmos o número 6 pela primeira vez. Seja X o total de lançamentos realizados, e Y o total de lançamentos onde observamos algo diferente de 6. Encontre a função probabilidade, esperança e variância de X e Y.

12 — Numa central telefônica, o número de chamadas chega segundo uma distribuição de Poisson, com media de 8 chamadas por minuto. Determinar qual é a probabilidade de receber (durante um minuto):

a) 10 ou mais chamadas;
b) menos do que 9 chamadas;

* **13 —** Um posto de atendimento do INSS abre um certo dia já com uma vila enorme de pessoas esperando atendimento. Como os problemas a serem resolvidos podem ser complicados e o número de funcionários é pequeno neste dia, eles conseguem atender uma média de apenas 3 pessoas por hora. Suponha que, para cada $t > 0$, o total de pessoas atendidas após t horas da abertura é uma variável aleatória $N(t)$ com distribuição de Poisson. Se T é o tempo de es-

pera da segunda pessoa na fila, encontre a função densidade de probabilidade de T. Em seguida calcule $\mathbf{E}[T]$ e $\mathbf{Var}[T]$.

14 — É dia de show e duas pessoas, que resolveram dormir na porta para serem os primeiros a entrar, formam uma fila na porta do teatro. Denote de S_1 e S_2 as distâncias (em metros) até a entrada do teatro do primeiro e segundo da fila, respectivamente. Suponha que S_1 tem função densidade de probabilidade dada por

$$f(t) = \begin{cases} c(10-t) & \text{, se } 0 \leq t \leq 10, \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases},$$

onde $c > 0$ é uma contante de normalização. Suponha também que $S_2 \sim \mathrm{Uniforme}[0, 10]$. Dada as informações acima, faça o que se pede.

a) Encontre o valor de c.

b) Encontre a média e variância de S_1.

c) Calcule a probabilidade da primeira pessoa da fila estar a menos de 3 metros da entrada.

d) Calcule a probabilidade da segunda pessoa da fila estar a menos de 3 metros da entrada.

e) Escolhemos ao acaso uma das duas pessoas. Calcule a probabilidade da pessoa escolhida estar a menos de 3 metros da entrada.

15 — Você chega na parada de ônibus as 10:00, sabendo que o ônibus chegará em algum horário uniformemente distribuído entre 10:00 e 10:30.

a) Qual é a probabilidade de que você tenha que esperar mais de 10 minutos?

b) Se as 10:15 o ônibus ainda não tiver chegado, qual é a probabilidade condicional de que você tenha que esperar pelo menos mais 10 minutos?

16 — Repita o exercício anterior supondo que o ônibus chega T minutos após às 10hs, onde T é exponencialmente distribuída com média de 15 minutos.

17 — Uma urna contém apenas bolas pretas e brancas. Para estimar a proporção de bolas pretas na caixa selecionamos uma amostra de n bolas e calculamos a proporção de bolas pretas nesta amostra. Denote por $\mathcal{E}$ o erro cometido nesta estimativa. Ou seja, $\mathcal{E}$ denota a diferença entre a proporção na amostra e a proporção real de bolas pretas na caixa. Sabemos que neste caso $\mathcal{E}$ tem distribuição Normal com média $\mu = 0$ e variância $\sigma^2 = \frac{1}{4n}$. Nestas condições encontre o valor de n para que a probabilidade do do erro estar entre -2% e 2% seja de aproximadamente $0{,}95$.

Respostas dos Exercícios

1 **a.)** $2^5 = 32$.
b.) $W = \{(1,1,1,1,1), (1,1,1,1,0), (1,1,1,0,1), (1,1,0,1,1), (1,1,1,0,0), (1,1,0,1,0), (1,1,0,0,1), (1,1,0,0,0), (1,0,1,1,1), (0,1,1,1,1), (1,0,1,1,0), (0,1,1,1,0), (0,0,1,1,1), (0,0,1,1,0), (1,0,1,0,1)\}$.
c.) 8.
d.) $A \cap W = \{(1,1,1,0,0), (1,1,0,0,0)\}$.

2 **a.)** $E \cap F^c \cap G^c$.
b.) $E \cap G \cap F^c$.
c.) $E \cup F \cup G$.
d.) $(E \cap F) \cup (E \cap G) \cup (F \cap G)$.
e.) $E \cap F \cap G$.
f.) $E^c \cap F^c \cap G^c$.
g.) $(E^c \cap F^c \cap G^c) \cup (E \cap F^c \cap G^c) \cup (E^c \cap F \cap G^c) \cup (E^c \cap F^c \cap G)$
h.) $(E \cap F \cap G)^c$.
i.) $(E \cap F \cap G^c) \cup (E \cap F^c \cap G) \cup (E^c \cap F \cap G)$.
j.) Ω.