Lista 1 - Cálculo de Probabilidades

Distribuição de Variáveis e Vetores Aleatórios

Função Distribuição Acumulada de uma V.a.

1 — Dada a função de distribuição acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 1 \\ 0{,}1 & \text{se} \quad 1 \le x < 2 \\ 0{,}3 & \text{se} \quad 2 \le x < 3 \\ 0{,}7 & \text{se} \quad 3 \le x < 4 \\ 0{,}8 & \text{se} \quad 4 \le x < 5 \\ 1 & \text{se} \quad 5 \le x \end{cases},$$

a) Calcule a função de probabilidade da variável X cuja f.d.a. é $F(\cdot)$.

b) Calcule ainda o valor esperado e a variância de X.

c) Determine também as seguintes probabilidades:

$$\mathbf{P}(1 < X \le 2) \quad \mathbf{P}(1 \le X < 2) \quad \mathbf{P}(X > 3) \quad \mathbf{P}(X \le 4)$$

2 — Seja T uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade dada por

$$f(t) = \frac{5}{4(t+1)^2}, 0 \le t \le 4.$$

Determine a função distribuição acumulada de T.

3 — Seja X uma variável aleatória discreta com

$$\mathbf{P}(X = 0) = 0{,}25,$$

$$\mathbf{P}(X = 1) = 0{,}125,$$

$$\mathbf{P}(X = 2) = 0{,}125,$$

e

$$\mathbf{P}(X = 3) = 0{,}5.$$

a) Faça o gráfico da função de distribuição acumulada,

b) Determine as seguintes probabilidades:

$$\mathbf{P}(0 \le X < 1), \quad \mathbf{P}(X \le 2), \quad \mathbf{P}(X > 3), \quad \mathbf{P}(X > 2{,}5).$$

4 — Seja X uma variável aleatória com função de distribuição acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{se} \quad x \ge 0 \end{cases},$$

determine as seguintes probabilidades:

a) $\mathbf{P}(X = 3)$;

b) $\mathbf{P}(X = t), t \in \mathbb{R}$;

c) $\mathbf{P}(1 < X \le 2)$;

d) $\mathbf{P}(1 \le X < 2)$;

e) $\mathbf{P}(X > 3)$

f) $\mathbf{P}(X > t)$ para $t > 0$;

g) $\mathbf{P}(X > 5 \mid X > 2)$;

h) $\mathbf{P}(X > t + s \mid X > t)$ para $t, s > 0$.

5 — Dada a função de distribuição acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 1 \\ \frac{x}{4} & \text{se} \quad 1 \le x < 2 \\ 0{,}5 & \text{se} \quad 2 \le x < 3 \\ 0{,}7 & \text{se} \quad 3 \le x < 4 \\ \frac{(x-4)^2 + 4}{5} & \text{se} \quad 4 \le x < 5 \\ 1 & \text{se} \quad 5 \le x \end{cases},$$

de uma v.a. X, determine as seguintes probabilidades:

$$\mathbf{P}(X = 1) \quad \mathbf{P}(X = 2) \quad \mathbf{P}(X = 3)$$

$$\mathbf{P}(X = 4) \quad \mathbf{P}(X = 5) \quad \mathbf{P}(2 < X \le 4)$$

$$\mathbf{P}(2 \le X < 4) \quad \mathbf{P}(X > 3) \quad \mathbf{P}(X \le 4).$$

Distribuição Conjunta

6 — Sorteamos 3 bolas de uma urna com 4 bolas amarelas e 6 bolas azuis e 2 bolas verdes. Seja X o total de bolas amarelas sorteadas e Y o total de bolas azuis sorteadas. Nestas condições, encontre a função de probabilidade conjunta de X e Y nos casos em que

a) o sorteio é feito sem reposição,

b) o sorteio é feito com reposição.

7 — No exercício anterior, defina as variáveis aleatórias $X_i = 1$ se a i—ésima bola sorteada é amarela, e $X_i = 0$ caso contrário, $i = 1,2,3$. Encontre a função de probabilidade conjunta de X_1,X_2,X_3 nos casos em que

a) o sorteio é feito sem reposição,

b) o sorteio é feito com reposição.

8 — Uma caixa com 5 lâmpadas possui 2 com defeito. As lâmpadas serão testadas uma a uma, até que todas as defeituosas sejam identificadas. Seja N_1 o total de testes realizados até que a primeira lâmpada defeituosa seja identificada, e N_2 o total de testes até a segunda lâmpada ser identificada.

a) Encontre a função de probabilidade conjunta de N_1 e N_2;

b) Encontre a função de probabilidade marginal de N_1;

c) Encontre a função de probabilidade marginal de N_2.

9 — Um certo experimento consiste em sortear uma bola em uma urna, observar sua cor, e devolver a bola para a urna junto com outra bola da mesma cor. Realizamos este experimento 3 vezes em uma urna que contém, inicialmente, n bolas azuis e m bolas amarelas.

Denote por X_i e Y_i, $i = 1,2,3$ o total, respectivamente, de bolas azuis e amarelas na urna após i repetições do experimento.

a) Encontre as funções de probabilidade conjunta de X_i,Y_i, para cada $i = 1,2,3$.

b) Calcule

$$\mathbf{P}((X_{i+1},Y_{i+1}) = (k+1,l)|(X_{i+1},Y_{i+1}) = (k,l))$$

e

$$\mathbf{P}((X_{i+1},Y_{i+1}) = (k,l+1)|(X_{i+1},Y_{i+1}) = (k,l))$$

para cada $i = 1,2$.

10 — A função de densidade conjunta de X e Y é dada por

$$f(x,y) = c(y^2 - x^2)e^{-y}, \ -y \leq x \leq y, y > 0.$$

a) Calcule o valor de c;

b) Encontre as densidades marginais de X e Y;

c) Determine $\mathbf{E}[X]$.

11 — A função de densidade conjunta de X e Y é dada por

$$f(x,y) = \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right), 0 < x < 1, 0 < y < 2.$$

a) Verifique que $f(x,y)$ é de fato uma função densidade conjunta;

b) Encontre as densidades marginais de X e Y;

c) Determine $\mathbf{E}[X]$ e $\mathbf{E}[Y]$;

d) Determine $\mathbf{P}(X > Y)$;

e) Determine $\mathbf{P}\left(Y > \frac{1}{2} \,|\, X < \frac{1}{2}\right)$;

12 — Dadas variáveis aleatórias X e Y com função densidade conjunta dada por

$$f(x,y) = e^{-(x+y)}, x > 0, y > 0,$$

encontre a função densidade de probabilidade das variáveis

a) $S = X + Y$

b) $V = X/Y$

c) $W = \max\{X,Y\}$

Respostas dos Exercícios

1 a) Se $p(k) = \mathbf{P}(X = k)$ então

$$p(1) = 0{,}1 \qquad p(2) = 0{,}2 \qquad p(3) = 0{,}4$$
$$p(4) = 0{,}1 \qquad p(5) = 0{,}2$$

b) $\mathbf{E}[X] = 3{,}1$ e $\mathbf{Var}(X) = 8$

c) $\mathbf{P}(1 < X \leq 2) = 0{,}2 \qquad \mathbf{P}(1 \leq X < 2) = 0{,}1$
$\mathbf{P}(X > 3) = 0{,}3 \qquad \mathbf{P}(X \leq 4) = 0{,}8.$

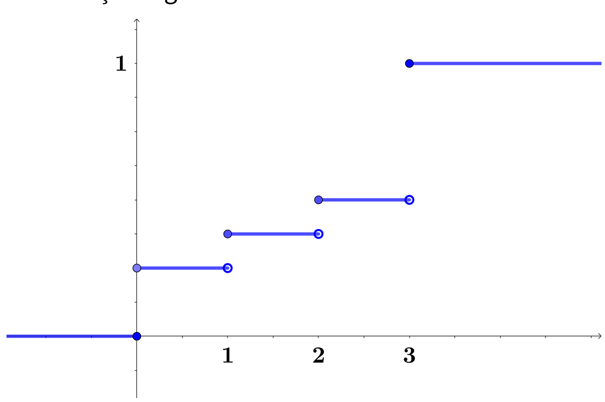
2 Se $F(t) = \mathbf{P}(T \leq t)$ então

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < 0 \\ \dfrac{t}{t+1} & \text{se} \quad 0 \leq t < 4 \\ 1 & \text{se} \quad t \geq 4 \end{cases},$$

3 a) A função distribuição acumulada é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ 0{,}25 & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ 0{,}375 & \text{se} \quad 1 \leq x < 2 \\ 0{,}5 & \text{se} \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 3 \end{cases},$$

e o esboço do gráfico é



b)
$$\mathbf{P}(0 \leq X < 1) = 0{,}25 \quad \mathbf{P}(X \leq 2) = 0{,}5$$
$$\mathbf{P}(X > 1) = 0{,}625 \quad \mathbf{P}(X > 2{,}5) = 0{,}5.$$

4 a) $\mathbf{P}(X = 3) = 0$

b) $\mathbf{P}(X = t) = 0$

c) $\mathbf{P}(1 < X \leq 2) = e^{-1} - e^{-2}$

d) $\mathbf{P}(1 < X < 2) = e^{-1} - e^{-2}$

e) $\mathbf{P}(X > 3) = e^{-3}$

f) $\mathbf{P}(X > t) = e^{-t}$, se $t > 0$

g) $\mathbf{P}(X > 5 \mid X > 2) = e^{-3}$

h) $\mathbf{P}(X > t + s \mid X > t) = e^{-s}$ para $t, s > 0$.

5

$$\mathbf{P}(X = 1) = \frac{1}{4} \quad \mathbf{P}(X = 2) = 0 \quad \mathbf{P}(X = 3) = \frac{1}{5}$$
$$\mathbf{P}(X = 4) = \frac{1}{10} \quad \mathbf{P}(X = 5) = 0 \quad \mathbf{P}(2 < X \leq 4) = \frac{3}{10}$$
$$\mathbf{P}(2 \leq X < 4) = \frac{1}{5} \quad \mathbf{P}(X > 3) = \frac{3}{10} \quad \mathbf{P}(X \leq 4) = \frac{4}{5}.$$

6 a) Se $p(i,j) = \mathbf{P}(X = i, Y = j)$ então

$$p(0,0) = 0 \quad p(0,1) = \frac{3}{110} \quad p(0,2) = \frac{3}{22} \quad p(0,3) = \frac{1}{11}$$
$$p(1,0) = \frac{1}{55} \quad p(1,1) = \frac{12}{55} \quad p(1,2) = \frac{3}{11} \quad p(1,3) = 0$$
$$p(2,0) = \frac{3}{55} \quad p(2,1) = \frac{9}{55} \quad p(2,2) = 0 \quad p(2,3) = 0$$
$$p(3,0) = \frac{1}{55} \quad p(3,1) = 0 \quad p(3,2) = 0 \quad p(3,3) = 0$$

b) Se $p(i,j) = \mathbf{P}(X = i, Y = j)$ então

$$p(0,0) = \frac{1}{216} \quad p(0,1) = \frac{1}{24} \quad p(0,2) = \frac{1}{8} \quad p(0,3) = \frac{1}{8}$$
$$p(1,0) = \frac{1}{36} \quad p(1,1) = \frac{1}{6} \quad p(1,2) = \frac{1}{4} \quad p(1,3) = 0$$
$$p(2,0) = \frac{1}{18} \quad p(2,1) = \frac{1}{6} \quad p(2,2) = 0 \quad p(2,3) = 0$$
$$p(3,0) = \frac{1}{27} \quad p(3,1) = 0 \quad p(3,2) = 0 \quad p(3,3) = 0$$

7 a) Se $p(i,j,k) = \mathbf{P}(X_1 = i, X_2 = j, X_3 = k)$ então

$$p(0,0,0) = \frac{14}{55} \qquad p(0,0,1) = \frac{28}{165}$$
$$p(0,1,0) = \frac{28}{165} \qquad p(0,1,1) = \frac{4}{55}$$
$$p(1,0,0) = \frac{28}{165} \qquad p(1,0,1) = \frac{4}{55}$$
$$p(1,1,0) = \frac{4}{55} \qquad p(1,1,1) = \frac{1}{55}$$

b) Se $p(i,j,k) = \mathbf{P}(X_1 = i, X_2 = j, X_3 = k)$ então

$$p(0,0,0) = \frac{8}{27} \qquad p(0,0,1) = \frac{4}{27}$$
$$p(0,1,0) = \frac{4}{27} \qquad p(0,1,1) = \frac{2}{27}$$
$$p(1,0,0) = \frac{4}{27} \qquad p(1,0,1) = \frac{2}{27}$$
$$p(1,1,0) = \frac{2}{27} \qquad p(1,1,1) = \frac{1}{27}$$

8 a) $N_1 \in \{1,2,3,4\}$ e $N_2 \in \{2,3,4,5\}$

$$\mathbf{P}(N_1 = 1, N_2 = 2) = \frac{1}{10} \quad \mathbf{P}(N_1 = 1, N_2 = 3) = \frac{1}{10}$$
$$\mathbf{P}(N_1 = 1, N_2 = 4) = \frac{1}{10} \quad \mathbf{P}(N_1 = 1, N_2 = 5) = \frac{1}{10}$$
$$\mathbf{P}(N_1 = 2, N_2 = 2) = 0 \quad \mathbf{P}(N_1 = 2, N_2 = 3) = \frac{1}{10}$$
$$\mathbf{P}(N_1 = 2, N_2 = 4) = \frac{1}{10} \quad \mathbf{P}(N_1 = 2, N_2 = 5) = \frac{1}{10}$$
$$\mathbf{P}(N_1 = 3, N_2 = 2) = 0 \quad \mathbf{P}(N_1 = 3, N_2 = 3) = 0$$
$$\mathbf{P}(N_1 = 3, N_2 = 4) = \frac{1}{10} \quad \mathbf{P}(N_3 = 3, N_2 = 5) = \frac{1}{10}$$
$$\mathbf{P}(N_1 = 4, N_2 = 2) = 0 \quad \mathbf{P}(N_1 = 4, N_2 = 3) = 0$$
$$\mathbf{P}(N_1 = 4, N_2 = 4) = 0 \quad \mathbf{P}(N_4 = 4, N_2 = 5) = \frac{1}{10}$$

b) $N_1 \in \{1,2,3,4\}$ e

$$\mathbf{P}(N_1 = 1) = \frac{2}{5} \quad \mathbf{P}(N_1 = 2) = \frac{3}{10}$$
$$\mathbf{P}(N_1 = 3) = \frac{1}{5} \quad \mathbf{P}(N_1 = 4) = \frac{1}{10}$$

c) $N_2 \in \{2,3,4,5\}$ e

$$\mathbf{P}(N_2 = 2) = \frac{1}{10} \quad \mathbf{P}(N_2 = 3) = \frac{1}{5}$$
$$\mathbf{P}(N_2 = 4) = \frac{3}{10} \quad \mathbf{P}(N_2 = 5) = \frac{2}{5}$$

9 a) - $X_1 \in \{n, n+1\}$ e $Y_1 \in \{m, m+1\}$

Se $p_1(k,l) = \mathbf{P}(X_1 = k, Y_1 = l)$ então

$$p_1(n,m) = p_1(n+1,m+1) = 0$$
$$p_1(n,m+1) = \frac{m}{n+m} \qquad p_1(n+1,m) = \frac{n}{n+m}$$

———

- $X_2 \in \{n, n+1, n+2\}$ e $Y_2 \in \{m, m+1, m+2\}$

Se $p_2(k,l) = \mathbf{P}(X_2 = k, Y_2 = l)$ então

$$p_2(n,m) = p_2(n,m+1) = 0$$
$$p_2(n+1,m) = p_2(n+1,m+2) = 0$$
$$p_2(n+2,m+1) = p_2(n+2,m+2) = 0$$
$$p_2(n,m+2) = \frac{m(m+1)}{(n+m)(n+m+1)}$$
$$p_2(n+1,m+1) = \frac{2nm}{(n+m)(n+m+1)}$$
$$p_2(n+2,m) = \frac{n(n+1)}{(n+m)(n+m+1)}$$

———

- $X_3 \in \{n, n+1, n+2, n+3\}$ e $Y_3 \in \{m, m+1, m+2, m+3\}$

Se $p_3(k,l) = \mathbf{P}(X_2 = k, Y_2 = l)$ então

$$p_3(n,m) = p_3(n,m+1) = p_3(n,m+2) = 0$$
$$p_3(n+1,m) = p_3(n+1,m+1) = p_3(n+1,m+3) = 0$$
$$p_3(n+2,m) = p_3(n+2,m+2) = p_3(n+2,m+3) = 0$$
$$p_3(n+3,m+1) = p_3(n+3,m+2) = p_3(n+3,m+3) = 0$$
$$p_3(n,m+3) = \frac{m(m+1)(m+2)}{(n+m)(n+m+1)(n+m+2)}$$
$$p_3(n+1,m+2) = \frac{3nm(m+1)}{(n+m)(n+m+1)(n+m+2)}$$
$$p_3(n+2,m+1) = \frac{3mn(n+1)}{(n+m)(n+m+1)(n+m+2)}$$
$$p_3(n+3,m) = \frac{n(n+1)(n+2)}{(n+m)(n+m+1)(n+m+2)}$$

b) $\mathbf{P}((X_{i+1}, Y_{i+1}) = (k+1, l) | (X_{i+1}, Y_{i+1}) = (k,l)) = \dfrac{k}{k+l}$

$\mathbf{P}((X_{i+1}, Y_{i+1}) = (k, l+1) | (X_{i+1}, Y_{i+1}) = (k,l)) = \dfrac{l}{k+l}$

10 a) $c = \frac{1}{8}$

b) $f_X(x) = \frac{1}{4}(|x|+1)e^{-|x|}, x \in \mathbb{R}$ e $f_Y(y) = \dfrac{1}{6}y^3e^{-y}, y > 0$

c) $\mathbf{E}[X] = 0$

11 a) -

b) $f_X(x) = \frac{6}{7}(2x^2 + x), 0 < x < 1$

$f_Y(y) = \dfrac{1}{14}(4 + 3y), 0 < y < 2$

c) $\mathbf{E}[X] = \dfrac{5}{7}$ e $\mathbf{E}[Y] = \frac{8}{7}$

d) $\mathbf{P}(X > Y) = \dfrac{15}{56}$

e) $\mathbf{P}\left(Y > \frac{1}{2} \,|\, X < \frac{1}{2}\right) = \dfrac{69}{80}$

12 a) Se $S = X + Y$ então

$$f_S(s) = se^{-x}, s > 0$$

b) Se $V = X/Y$ então

$$f_V(v) = \frac{1}{(v+1)^2}, v > 0$$

c) Se $W = \max\{X, Y\}$ então

$$f_W(w) = 2(e^{-w} - e^{-2w}), w > 0$$