Lista 2 - Cálculo de Probabilidades

Variáveis Independentes

Variáveis Independentes

1 — A função de probabilidade conjunta de X e Y é dada por

$$p(1,1) = \frac{1}{8} \quad p(1,2) = \frac{1}{4}$$

$$p(2,1) = \frac{1}{8} \quad p(2,2) = \frac{1}{2}$$

a) Encontre as funções de probabilidade marginais de X e Y;

b) X e Y são independentes?

c) Encontre as funções de probabilidade de $X+Y$, $X-Y$, XY e X/Y.

2 — Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição de Bernoulli de parâmetro $p \in (0,1)$. Mostre por indução que $X_1 + \cdots + X_n \sim \mathrm{Binomial}(n,p)$.

3 — Rolamos um dado não viesado repetidas vezes. Denote por N o total de lançamentos necessários até observarmos um valor diferente de 6, e denote por X o valor observado neste lançamento.

a) O que diz a sua intuição? N e X devem ser independentes?

b) Encontre $\mathbf{P}(N = k, X = i)$, $i = 1,2,3,4,5$ e $k = 1,2,3,4,\ldots$.

c) Encontre as funções de probabilidade marginais de N e X.

d) Verifique se N e X são independentes.

4 — Mostre que se $N \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ e $M \sim \mathrm{Poisson}(\mu)$ independentes, então $N + M \sim \mathrm{Poisson}(\lambda+\mu)$. Lembre-se que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

5 — O total de chamadas que passam por uma torre de celular ao longo de uma hora é uma variável aleatória N com distribuição de Poisson de média $\lambda > 0$. Para tentar distinguir os tipos de chamadas recebidas, considere que cada chamada tem probabilidade p de ser local e $1-p$ de ser internacional ou interurbana. Seja N_1 o total de chamadas locais recebidas pela central em uma hora e N_2 o total de chamadas internacionais ou interurbanas recebidas pela torre no mesmo período. Para mostrar que N_1 e N_2 são independentes, e tem distribuição de Poisson de média λp e $\lambda(1-p)$, respectivamente, siga os passos abaixo.

a) Mostre que

$$\mathbf{P}(N_1 = i, N_2 = j) = \mathbf{P}(N_1 = i, N_2 = j | N = i+j)\mathbf{P}(N = i+j)$$

b) Argumente que

$$\mathbf{P}(N_1 = i, N_2 = j | N = i+j) = \binom{i+j}{i} p^i (1-p)^j$$

c) Encontre a função de probabilidade conjunta de N_1 e N_2;

d) Determine as funções de probabilidade marginais de N_1 e N_2 e conclua o resultado.

6 — De acordo com o Centro Nacional para Estatísticas de Saúde dos EUA, $25{,}2\%$ dos homens e $23{,}6\%$ das mulheres nunca tomam café da manhã. Suponha que amostras aleatórias de 200 homens e 200 mulheres sejam escolhidas. Obtenha a probabilidade de que

a) pelo menos 110 dessas 400 pessoas nunca tomem café da manhã;

b) o número de mulheres que nunca tomam café da manhã seja pelo menos tão grande quanto o número de homens que nunca tomam café da manhã.

Dica: Use a aproximação normal para a distribuição binomial.

7 — Um vetor aleatório (X,Y) é dito uniformemente distribuído em uma região limitada $R \subset \mathbb{R}^2$ do plano se para alguma constante $c \in \mathbb{R}$, sua densidade conjunta é dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & \text{se } (x,y) \in R \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Mostre que $1/c =$área da região R;
b) Mostre que se $R = [a,b] \times [c,d]$ então X,Y são independentes.

8 — Se (X,Y) é uniformemente distribuído em um quadrado de lado 2, centrado em $(0,0)$ (ou seja, $R = [-1,1] \times [-1,1]$ no exercício anterior), calcule $\mathbf{P}(X^2 + Y^2 \leq 1)$.

9 — Sejam X,Y variáveis aleatórias com função densidade conjunta dada por

$$f(x,y) = xe^{-(x+y)}, x > 0, y > 0,$$

e T,S variáveis aleatórias com densidade conjunta dada por

$$f(t,s) = \frac{4}{3}te^{-(t+s)}, t > 0, 0 < s < t.$$

a) As variáveis X,Y são independentes?
b) E as variáveis S,T?

10 — No exercício anterior, encontre as funções densidade de probabilidade das variáveis X,Y,T e S.

11 — Sejam X e Y variáveis i.i.d. com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$. Determine a densidade de $X + Y$.

12 — A venda bruta diária de um restaurante, em milhares de reais, é normalmente distribuída com média 10 e desvio padrão 2. Calcule a probabilidade de que

a) a venda bruta total em dois dias exceda 23 mil reais;
b) a venda diária exceda 8 mil reais em ao menos dois dias, durante três dias consecutivos.

Para resolver este problema você precisa fazer hipóteses de independência. Que hipóteses são essas?

13 — Uma máquina funciona normalmente enquanto 2 de suas 3 baterias esteja com carga. Os tempos de carga em dias das 3 baterias são independentes com densidade de probabilidade $f(t) = te^{-t}, t > 0$. Seja $N(t)$ o total de baterias funcionando após t dias, e T o tempo de funcionamento da máquina.

a) Encontre a função de probabilidade de $N(t)$
b) Encontre a densidade de T

14 — Uma central de atendimento funciona com dois servidores atendendo simultaneamente, de modo independente. O tempo de atendimento por chamada do servidor i, que chamaremos de T_i, tem distribuição exponencial de parâmetro λ_i, $i = 1,2$, independentes entre si. Em um dado instante encontramos filas vazias e exatamente uma pessoa sendo atendida em cada servidor. Seja $T = \min\{T_1, T_2\}$ o instante que o primeiro deles é liberado. Considerando que ambos começaram o atendimento ao mesmo tempo, determine a densidade de T.

* **15 —** Dada uma variável aleatória contínua e positiva T com densidade $f(t)$, $t > 0$, definimos a taxa de risco $\lambda_T(t)$ de T por

$$\lambda_T(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)},$$

onde $F(t) = \mathbf{P}(T \leq t)$ é a função distribuição acumulada de T.
Se T representa o tempo de falha de algum componente, a taxa de risco pode ser interpretada como a taxa com a qual ocorre a falha, dado que o componente ainda não falhou no instante t. Ou seja,

$$\mathbf{P}(t < T < t + dt | T > t) \approx \lambda_T(t)dt.$$

Considere agora variáveis $T_1, \cdots, T_n$ positivas e independentes, com funções densidade dadas respectivamente por $f_1(t), \cdots, f_n(t)$, e defina $W = \min\{T_1, \cdots, T_n\}$.
Com estas informações em mente, faça o que se pede.

a) Encontre a função distribuição acumulada de W em termos da funções distribuição acumuladas de $T_1, \cdots, T_n$;
b) Mostre que a taxa de risco $\lambda_W(t)$ de W é dada por

$$\lambda_W(t) = \lambda_{T_1}(t) + \cdots + \lambda_{T_n}(t).$$

c) Repita os itens anteriores no caso em que

$$T_i \sim \text{Exponencial}(\lambda_i),$$

$i = 1, \ldots, n$.

(Se tiver dificuldade, faça primeiro o caso $n = 2$)

Respostas dos Exercícios

1 a) $p_X(1) = \frac{3}{8} \qquad p_X(2) = \frac{5}{8}$

$p_Y(1) = \frac{1}{4} \qquad p_Y(2) = \frac{3}{4}$

b) Não

c) $Z = X + Y \in \{2,3,4\}$ com

$$p_Z(2) = \frac{1}{8} \quad p_Z(3) = \frac{3}{8} \quad p_Z(3) = \frac{1}{2}$$

$W = X - Y \in \{-1,0,1\}$ com

$$p_W(-1) = \frac{1}{4} \quad p_W(0) = \frac{5}{8} \quad p_W(1) = \frac{1}{8}$$

$V = X/Y \in \{\frac{1}{2},1,2\}$ com

$$p_V\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \quad p_V(1) = \frac{5}{8} \quad p_V(2) = \frac{1}{8}$$

2 -

3 a) -

b) $\mathbf{P}(N = k, X = i) = \frac{1}{6^k}, k \in \{1,2,3,\ldots\}, i \in \{1,2,3,4,5\}$

c) $\mathbf{P}(N = k) = \frac{5}{6^k}, k \in \{1,2,3,\ldots\}$

$\mathbf{P}(X = i) = \frac{1}{5}, i \in \{1,2,3,4,5\}$

d) N e X são independentes

4 -

5 -

6 a) 0,0744

b) 0,3547

7 -

8 $\mathbf{P}(X^2 + Y^2 \leq 1) = \frac{\pi}{4}$

9 a) Sim

b) Não

10 As densidades de X,Y,T e S são

$$f_X(x) = xe^{-x}, x > 0 \qquad f_Y(y) = e^{-y}, y > 0$$

$$f_T(t) = \frac{4}{3}te^{-t}(1-e^{-t}), t > 0 \qquad f_S(s) = \frac{4}{3}(s+1)e^{-2s}, s > 0$$

11 Se $Z = X + Y$ então

$$f_Z(z) = \lambda^2 z e^{-\lambda z}, z > 0$$

12 a) 0,144

b) 0,9324

13 a) $N(t) \sim \text{Binomial}(3, e^{-t}(t+1))$

b) $f_T(t) = 6t(t+1)e^{-2t}(1-(t+1)e^{-t}), \quad t > 0$

14 $T \sim \text{Exponencial}(\lambda_1 + \lambda_2)$

15 a) Se $F_i(t) = \mathbf{P}(T_i \leq t), i = 1, \ldots, n$ e $F_W(t) = \mathbf{P}(W \leq t)$, então

$$F_W(t) = 1 - (1 - F_1(t)) \cdots (1 - F_n(t)), t > 0$$

b) -

c) Se $T_i \sim \text{Exponencial}(\lambda_i)$ então

$$F_W(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \text{ com } \lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$$

e

$$\lambda_W(t) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$$