Lista 4 - Cálculo de Probabilidades

Valor Esperado de Funções de Variáveis Aleatórias

1 — Uma apostadora joga simultaneamente uma moeda e um dado honestos. Se a moeda der cara, ela então ganha o dobro do valor que aparecer no dado; se der coroa, ela ganha a metade. Determine seus ganhos esperados.

2 — Tem-se apostas independentes, cada uma delas resultando em uma igual probabilidade de que o apostador ganhe ou perca 1 unidade. Suponha que W represente o ganho líquido de um apostador cuja estratégia consiste em parar de apostar logo após a sua primeira vitória. Determine

a) $\mathbf{P}(W > 0)$
b) $\mathbf{P}(W < 0)$
c) $\mathbf{E}[W]$

3 — Se X e Y possuem função densidade conjunta

$$f(x,y) = \frac{1}{y}, \quad 0 < y < 1, 0 < x < y,$$

calcule:

a) $\mathbf{E}[XY]$
b) $\mathbf{E}[X]$
c) $\mathbf{E}[Y]$

4 — O hospital municipal está localizado no centro de um quadrado cujos lados têm 3 km de extensão. Se um acidente ocorrer no interior desse quadrado, então o hospital envia uma ambulância. A disposição das ruas é tal que distância de viagem do hospital, que está nas coordenadas $(0, 0)$, ao ponto (x, y) é $|x| + |y|$. Se um acidente ocorre em um ponto uniformemente distribuído no interior do quadrado, determine a distância de viagem esperada da ambulância.

5 — N pessoas chegam separadamente em uma recepção. Ao chegar, cada pessoa olha ao redor para ver se tem amigos entre os presentes. Caso encontre amigos, senta ao acaso na mesa de um deles. Caso contrário, senta em um mesa desocupada. Supondo que cada um dos $\binom{N}{2}$ pares de pessoas seja, independentemente, um par de amigos com probabilidade p, determine o número esperado de mesas ocupadas.

(Dica: Não é necessário encontrar a distribuição do total de mesas ocupadas para calcular o valor esperado.)

6 — Considere n jogadas independentes de uma moeda com probabilidade p de dar cara. Digamos que uma inversão ocorra sempre que um resultado difira daquele que o precede. Por exemplo, no caso onde $n = 5$, se o resultado é $HHTHT$ (sendo H-cara e T- coroa), então ocorreram 3 inversões. Determine o valor esperado de inversões.

7 — Parte do sistema imunológico de nosso organismo consiste em certa classe de células conhecidas como células T. Há 2 tipos de células T, chamadas de CD4 e CD8. Embora o número total de células T em portadores do vírus da AIDS seja igual (pelo menos nos estágios iniciais da doença) ao número presente em indivíduos sadios, descobriu-se que as proporções de células T CD4 e CD8 são diferentes em pessoas sadias e naquelas portadoras do vírus: aproximadamente 60% das células T de uma pessoa sadia são do tipo CD4, enquanto o percentual de células T do tipo CD4 parece decrescer continuamente em portadores do vírus da AIDS. Um modelo propõe que o vírus HIV (que causa a AIDS) ataca as células CD4, e que o mecanismo do organismo para repor as células T mortas não consegue identificar se a célula morta era CD4 ou CD8. Em vez disso, ela produz uma nova célula T cujas probabilidades de ser dos tipos CD4 e CD8 são de $0{,}6$ e $0{,}4$, respectivamente. Entretanto, embora isso pareça ser uma maneira muito eficiente de se repor as células T quando cada célula morta tem a mesma probabilidade de ser de qualquer tipo (e, portanto, tem probabilidade de 0,6 de ser CD4), as consequências são perigosas ao se tratar de um vírus que ataca somente as células CD4.

Neste contexto, considere que o organismo de uma pessoa que carrega o vírus HIV possui inicialmente m células do tipo CD4, e calcule o número médio de células que devem ser mortas pelo vírus até que organismo não possua mais células CD4.

8 — Seja $Z \sim \mathrm{Normal}(0,1)$ e para $x \in \mathbb{R}$ defina a variável X por

$$X = \begin{cases} Z, \text{ se } Z > x \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Mostre que

$$\mathbf{E}[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

* **9 —** Certa região é habitada por r tipos distintos de certa espécie de inseto. Cada inseto capturado será, independentemente dos tipos capturados anteriormente, do tipo i com probabilidade

$$P_i, \quad i = 1,2,\dots,r.$$

a) Calcule o número médio de insetos capturados antes da captura de um inseto do tipo 1.
b) Calcule o número médio de tipos de insetos que são capturados antes da captura de um inseto do tipo i.

10 — Se X e Y são independentes e identicamente distribuídos com média μ e variância σ^2, determine $\mathbf{E}[(X-Y)^2]$.

11 — Sejam $X_1, \dots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e uniformemente distribuídas no intervalo $(0,1)$. Determine

a) $\mathbf{E}[\max\{X_1, \dots, X_n\}]$
b) $\mathbf{E}[\min\{X_1, \dots, X_n\}]$

12 — Para $X_1, X_2, \dots$ variáveis aleatórias contínuas, independentes e identicamente distribuídas, defina $N \geq 2$ como o primeiro instante no qual a sequência $(X_n)_{n\geq 1}$ para de crescer. Ou seja

$$\{N = n\} = \{X_1 \leq X_2 \cdots \leq X_{n-1} > X_n\}.$$

Mostre que $\mathbf{E}[N] = e$.

* **13 —** Um total de n bolas numeradas de 1 a n é colocado em n urnas (também numeradas de 1 a n) de forma que a bola i seja colocada em uma das urnas $1, \dots, i$ com a mesma probabilidade para cada urna. Determine

a) o número esperado de urnas vazias
b) a probabilidade de nenhuma das urnas estar vazia

14 — Se $\mathbf{E}[X] = 1$ e $\mathbf{Var}[X] = 5$ determine

a) $\mathbf{Var}[4 + 3X]$
b) $\mathbf{E}[(2 + X)^2]$

15 — Seja X o número de 1's e Y o número de 2's que ocorrem em n jogadas de um dado honesto. Compute $\mathbf{Cov}(X, Y)$.

16 — As variáveis aleatórias X e Y tem função densidade conjunta dada por

$$f(x,y) = 2e^{-2x}/x, \quad x > 0, 0 < y < x.$$

Calcule $\mathbf{Cov}(X, Y)$.

17 — As variáveis aleatórias X e Y tem função densidade conjunta dada por

$$f(x, y) = \frac{1}{y} e^{-(y + x/y)}, \quad x,y > 0.$$

Calcule $\mathbf{E}[X]$ e $\mathbf{E}[Y]$ e mostre que $\mathbf{Cov}(X, Y) = 1$.

18 — Se X_1, X_2, X_3, X_4 são variáveis aleatórias não correlacionadas (por pares), cada uma com média 0 e variância 1, calcule as correlações de

a) $U = X_1 + X_2$ e $W = X_3 + X_4$
b) $U = X_1 + X_2$ e $V = X_2 + X_3$

* **19 —** Considere um grafo com n vértices numerados de 1 a n e suponha que cada um dos $\binom{n}{2}$ pares de vértices distintos seja colocado um elo com probabilidade p, independente dos demais pares. O grau do vértice i, designado como D_i, corresponde ao número de elos que tem o vértice i como um de seus vértices.

a) Qual é a distribuição de D_i?
b) Determine $\rho(D_i, D_j)$, a correlação entre D_i e D_j.

* **20 —** Suponha que X seja uma variável aleatórias contínua com densidade f. Mostre que $\mathbf{E}|X - a|$ é minimizada quando a é a mediana de X. Ou seja, quando $P(X > a) = P(X < a) = 1/2$.
Dica: divida a integral da esperança nas regiões onde $x < a$ e onde $x > a$ antes de derivar.

Respostas dos Exercícios

1 Se V = ganho da apostadora, então

$$\mathbf{E}[V] = \frac{27}{8}$$

2 a) $\mathbf{P}(W > 0) = \frac{1}{2}$

b) $\mathbf{P}(W < 0) = \frac{1}{4}$

c) $\mathbf{E}[W] = 0$

3
1. $\mathbf{E}[XY] = \frac{1}{6}$
2. $\mathbf{E}[X] = \frac{1}{4}$
3. $\mathbf{E}[Y] = \frac{1}{2}$

4 Se D é a distância de viagem

$$\mathbf{E}[D] = 3$$

5 Se O é o total de mesas ocupadas,

$$\mathbf{E}[O] = \frac{1 - (1 - p)^N}{p}$$

6 Se I é o total de inversões

$$\mathbf{E}[I] = 2(n - 1)p(1 - p)$$

7 Se N é o total de células mortas até o organismo não possuir mais células CD4

$$\mathbf{E}[N] = \frac{5m}{2}$$

8 —

9 a) Se N é o número de insetos capturados antes da captura do tipo 1

$$\mathbf{E}[N] = \frac{1 - P_1}{P_1} = \frac{P_2 + \cdots + P_r}{P_1}$$

b) Se M é o total de tipos capturados antes da captura do tipo i

$$\mathbf{E}[M] = \sum_{k=1, k \neq i}^{i} \frac{P_k}{P_k + P_i}$$

10 $\mathbf{E}[(X - Y)^2] = 2\sigma^2$

11 a) $\mathbf{E}[\max\{X_1, \ldots, X_n\}] = \frac{n}{n+1}$

b) $\mathbf{E}[\min\{X_1, \ldots, X_n\}] = \frac{1}{n+1}$

12 —

13 Se N é o total de urnas vazias

1. $\mathbf{E}[N] = \frac{n-1}{2}$
2. $\mathbf{P}(N = 0) = \frac{1}{n!}$

14 a) $\mathbf{Var}[4 + 3X] = 45$

b) $\mathbf{E}[(2 + X)^2] = 14$

15 $\mathbf{Cov}(X, Y) = -\frac{n}{36}$

16 $\mathbf{Cov}(X, Y) = \frac{1}{8}$

17 $\mathbf{E}[X] = 1$ e $\mathbf{E}[Y] = 1$

18 a) $\rho(U,V) = 0$

b) $\rho(U,V) = \frac{1}{2}$

19 a) $D_i \sim$ Binomial$(n - 1, p)$

b) Para $i \neq j$, $\rho(D_i, D_j) = \frac{1}{n-1}$

20 —