Lista 5 - Cálculo de Probabilidades

Esperança Condicional

1 — Um dado honesto é jogado sucessivamente. Suponha que X e Y representem, respectivamente, o número de jogadas necessárias para se obter um 6 e um 5. Determine

a) $\mathbf{E}[X]$

b) $\mathbf{E}[X|Y = 1]$

c) $\mathbf{E}[X|Y = 5]$

2 — Há duas moedas viciadas em uma caixa; suas probabilidades de dar cara quando jogadas são, respectivamente, de $0{,}4$ e $0{,}7$. Uma das moedas é escolhida aleatoriamente e jogada 10 vezes. Qual é a esperança condicional do total de caras nas 10 jogadas?

* **3 —** Considerando as mesmas condições do exercício anterior, calcule a esperança condicional do total de caras nas 10 jogadas, dado que duas das primeiras três jogadas tenham dado cara.

4 — A função densidade conjunta das variáveis X e Y é dada por

$$f(x, y) = \frac{e^{-x/y} e^{-y}}{y}, \quad x, y > 0.$$

Determine $\mathbf{E}[X^2|Y = y]$.

5 — A função densidade conjunta das variáveis X e Y é dada por

$$f(x, y) = \frac{e^{-y}}{y}, \quad 0 < x < y.$$

Determine $\mathbf{E}[X^2|Y = y]$.

6 — Um prisioneiro está em uma cela com 3 portas. A primeira porta leva a um túnel que faz com que ele volte à sua cela após dois dias de viagem. A segunda leva a um túnel que faz com que ele volte à sua cela após 4 dias de viagem. A terceira porta o leva à liberdade após um dia de viagem. Se se supõe que o prisioneiro sempre selecione as portas 1, 2 e 3 com probabilidades $0{,}5$, $0{,}3$ e $0{,}2$, qual é o número esperado de dias até que ele alcance a liberdade?

7 — Suponha que o número esperado de acidentes por semana em uma fábrica seja igual a 5. Suponha também que os números de trabalhadores feridos em cada acidente sejam variáveis aleatórias independentes com média $2{,}5$. Se o número de trabalhadores feridos em cada acidente é independente do número de acidentes ocorridos, compute o número esperado de trabalhadores feridos em uma semana.

* **8 —** O número de pessoas que entra em um elevador no andar térreo é uma variável de Poisson com média 10. Se existem N andares acima do térreo e se cada pessoa tem a mesma probabilidade de descer em cada um dos andares, independentemente de onde descem as demais, compute o número esperado de paradas que o elevador fará antes de descarregar todos os seus passageiros.

** **9 —** Uma urna contém 30 bolas, das quais 10 são vermelhas e 8 são azuis. Doze bolas são sorteadas dessa urna. Suponha que X represente o número de bolas vermelhas, e Y o número de bolas azuis sorteadas.
Determine $\mathbf{Cov}(X, Y)$ de duas formas distintas, descritas abaixo.

a) definindo variáveis aleatórias indicadoras (isto é, de Bernoulli) X_i, Y_j apropriadas tais que

$$X = \sum_{i=1}^{10} X_i, \ Y = \sum_{j=1}^{8} Y_j.$$

b) condicionando (em X ou Y) para determinar $\mathbf{E}[XY]$.

10 — Lâmpadas do tipo i funcionam um tempo aleatório com média μ_i e desvio padrão σ_i, $i = 1, 2$. Uma lâmpada aleatoriamente escolhida de uma cesta é do tipo 1 com probabilidade p e do tipo 2 com probabilidade $1 - p$. Suponha que X represente o tempo de vida desta lampada. Determine

a) $\mathbf{E}[X]$

b) $\mathbf{Var}[X]$

11 — O número de tempestades de inverno em um ano bom é uma variável aleatória de Poisson com média 3, enquanto o número em um ano ruim é uma variável de Poisson com média 5. Se o próximo ano tem probabilidades $0{,}4$ de ser um ano bom e $0{,}6$ de ser um ano ruim, determine o valor esperado e a variância do número de tempestades no próximo ano.

* **12 —** Suponha que o número de pessoas que chegam em uma estação de trem em qualquer instante t seja uma variável aleatória de Poisson com média λt. Se o primeiro trem chega na estação em um instante de tempo que é uniformemente distribuído ao longo de $(0, T)$ e independente do instante de chegada dos passageiros, quais são a média e a variância do número de passageiros que entram no trem?

Respostas dos Exercícios

1 a) $\mathbf{E}[X] = 6$

b) $\mathbf{E}[X|Y = 1] = 7$

c) $\mathbf{E}[X|Y = 5] = \frac{3637}{625}$

2 Se S_{10} é o total de cara em 10 jogadas, então

$$\mathbf{E}[S_{10}] = 5,5$$

3 Se S_{10} é total de caras em 10 jogadas e S_3 é o total de caras nas três primeiras jogadas, então

$$\mathbf{E}[S_{10}|S_3 = 2] = \frac{14571}{2430} \approx 6,0703703$$

4 $\mathbf{E}[X^2|Y = y] = 2y^2, \; y > 0$

5 $\mathbf{E}[X^2|Y = y] = \dfrac{y^2}{3}, \; y > 0$

6 Se T é o tempo que o prisioneiro demora para escapar, então

$$\mathbf{E}[T] = 12$$

7 Se X é o total de acidentes em uma semana, então

$$\mathbf{E}[X] = 12,5$$

8 Se Z é o número de andares que o elevador para então

$$\mathbf{E}[Z] = N(1 - e^{N/10})$$

9 $\mathbf{Cov}(X, Y) = -\frac{96}{145}$

10
1. $\mathbf{E}[X] = p\mu_1 + (1 - p)\mu_2$
2. $\mathbf{Var}[X] = p(\sigma_1^2 + \mu_1^2) + (1 - p)(\sigma_2^2 + \mu_2^2) - (p\mu_1 + (1 - p)\mu_2)^2$

11 Se N é o número de tempestades de inverno em um ano, então

$$\mathbf{E}[N] = 4,2 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{Var}[N] = 5,16$$

12 Se N é o número de passageiros que entra no trem então

$$\mathbf{E}[N] = \frac{\lambda T}{2} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{Var}[N] = \frac{\lambda T}{2} + \frac{(\lambda T)^2}{12}$$