Lista 6 - Cálculo de Probabilidades

Função Geradora de Momentos, Desigualdades e Teoremas Limite

1 — Sabendo que a função geradora de momentos de uma variável $Z \sim \mathrm{Normal}(0,1)$ é $M_Z(t) = e^{t^2/2}$, encontre a função geradora de probabilidade de $X \sim \mathrm{Normal}(\mu, \sigma^2)$.

2 — Uma variável aleatória X_n tem distribuição χ^2 (chi-quadrado) com n graus de liberdade se X_n tem a mesma distribuição de

$$Z_1^2 + \cdots + Z_n^2,$$

onde $Z_1, \ldots, Z_n$ são variáveis i.i.d. com distribuição normal padrão.
Sabendo disso, faça o que se pede

a) Mostre que a função geradora de momentos de X_1 é dada por $M_1(t) = (1-2t)^{-1/2}$, para $t > 1/2$.
b) Encontre a função geradora de momento de X_n.
c) Encontre o primeiro e segundo momentos de X_n.

3 — A função geradora de momentos de X é dada por $M_X(t) = \exp[2e^t - 2]$, e a de Y por $M_Y(t) = \left(\frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}\right)^{10}$. Considere X e Y independentes, e determine

a) $\mathbf{E}(X+Y)$ e $\mathbf{E}(X+Y)^2$
b) $\mathbf{P}(X+Y=2)$
c) $\mathbf{P}(XY=0)$
d) $\mathbf{E}(XY)$

* **4 —** Sejam $X \sim \mathit{Geometrica}(p)$ e $Y \sim \mathit{Exponencial}(\lambda)$ para $p \in (0,1)$ e $\lambda > 0$.

a) Mostre que

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t},$$

para $t < -\ln(1-p)$.

b) Mostre que

$$M_Y(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t},$$

para $t < \lambda$.

c) Faça $p = \lambda/n$ e $X_n = X/n$ e mostre que $M_{X_n}(t) \to M_Y(t)$.

d) Calcule

$$\mathbf{P}(X_n > t)$$

para mostrar que $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n > t) = e^{-\lambda t}, t > 0$ e compare com o resultado do item anterior.

** **5 —** Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias i.i.d. com função geradora de momento $M(t) < \infty$ para $|t| < t_0$ para algum $t_0 > 1$. Defina $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ e $M_n(t)$ a função geradora de momento de S_n/n.

a) Encontre $M_n(t)$ em função de $M(t)$.
b) Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} M_n(t) = e^{t\mu}$$

onde $\mu = \mathbf{E}[X_1]$.

c) Interprete o resultado acima.

6 — Dadas variáveis $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. com $\mathbf{E}[X_1] = \mu < \infty$ e $Var(X_1) = \sigma^2 < \infty$, encontre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{X_1^2 + \cdots + X_n^2}.$$

7 — Com sua experiência, um professor sabe que a nota de um estudante na prova final é uma variável aleatória com média 75.

a) Forneça um limite superior para a probabilidade de que a nota de um estudante exceda 85. Suponha, além disso, que o professor saiba que a variância da nota de um estudante é igual a 25.
b) O que se pode dizer sobre a probabilidade de que a nota de um estudante esteja entre 65 e 85?
c) Quantos estudantes teriam que fazer a prova para assegurar, com probabilidade mínima de 0,9, que a média da turma esteja entre 75 ± 5?

8 — Sejam $X_1, \ldots, X_{20}$ variáveis aleatórias de Poisson independentes com média 1.

a) Use a desigualdade de Markov para obter uma cota superior para
$$\mathbf{P}\left(\sum_{n=1}^{20} X_n > 15\right).$$

b) Use o Teorema Central do Limite para aproximar a probabilidade do item anterior.

9 — Uma pessoa possui 100 lâmpadas cujos tempos de vida são exponenciais independentes com média de 5 horas. Se as lâmpadas são usadas uma de cada vez, sendo a lâmpada queimada imediatamente substituída por uma nova, obtenha uma aproximação para a probabilidade de que ainda exista uma lâmpada funcionando após 525 horas.

10 — A quantidade de tempo em dias que certo tipo de componente funciona antes de falhar é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade
$$f(x) = 2x, \quad 0 < x < 1.$$
Assim que o componente falha, ele é imediatamente substituído por outro do mesmo tipo. Se X_i representa o tempo de vida do i-ésimo componente utilizado, então
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$
representa o instante da n-ésima falha. A taxa de falhas r a longo prazo é definida por
$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{S_n}.$$
Supondo que as variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$ sejam independentes, determine r.

11 — No exercício anterior quantos componentes devem estar disponíveis para que se tenha 90% de certeza de que o estoque dure pelo menos 35 dias?

* **12 —** Engenheiros civis acreditam que W, a quantidade de peso (em toneladas) que certo vão de uma ponte pode suportar sem sofrer danos estruturais seja normalmente distribuído com média 400 e desvio padrão 40. Suponha que o peso (novamente em toneladas) de um carro seja uma variável aleatória com média 3 e desvio padrão 0,3. Aproximadamente quantos carros devem estar sobre a ponte para que a probabilidade de dano estrutural exceda 0,1?

13 — Certo componente é crítico para a operação de um sistema elétrico e deve ser substituído imediatamente após a sua falha. Se o tempo de vida médio deste tipo de componente é de 100 horas e seu desvio padrão é de 30 horas, quantos desses componentes devem estar em estoque de forma que a probabilidade de que o sistema permaneça em operação contínua nas próximas 2000 horas seja de pelo menos 0,95?

14 — Uma companhia de seguros tem 10.000 carros segurados. O valor esperado reclamado por cada segurado em um ano é de $R\$240,00$, com um desvio padrão de $R\$800$. Obtenha uma aproximação para a probabilidade de que o total reclamado em um ano supere $R\$2,7$ milhões.

15 — Uma amostra aleatória de n itens é tomada de uma distribuição com media μ e variância $\sigma^2, 0 < \sigma^2$. Utilizando o Teorema Central do Limite, determine o menor número de itens a serem considerados para que a seguinte elação seja satisfeita:
$$\mathbf{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \leq \frac{\sigma}{4}\right] \geq 0,99.$$

16 — Mostre que $\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$. (Sugestão: Considere uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d com distribuição Poisson e utilize o Teorema Central do Limite.)

** **17 —** Utilize a desigualdade de Chebyshev para obter uma demonstração elegante do Teorema de Aproximação de Weierstrass que afirma que se f é uma função contínua num intervalo fechado, i.e, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, então a sequência de polinômios de Bernstein
$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^k$$
converge para f para todo $x \in [0,1]$ quando $n \to \infty$.

Obs. Pode se provar que a convergência acima é uniforme para $x \in [0,1]$.

Dica: Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes cada uma assumindo os valores 0 e 1 com probabilidade p e $1-p$ respectivamente. Seja $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ o número de caras em n lançamentos. Defina o polinômio $r_n(p) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]$ e estude a expressão $|r_n(p) - f(p)|$.

Respostas dos Exercícios

1 $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

2 a) —

b) $M_(X_n)(t) = (1-2t)^{\frac{n}{2}}$

c) $\mathbf{E}[X_n] = n$ e $\mathbf{E}[X_n^2] = n(n+2)$

3 a) $\mathbf{E}(X+Y) = \frac{19}{2}$ e $\mathbf{E}(X+Y)^2 = \frac{753}{8}$

b) $\mathbf{P}(X+Y=2) = \dfrac{467e^{-2}}{4^10}$

c) $\mathbf{P}(XY=0) = \dfrac{(4^{10}-1)e^{-2}+1}{4^10}$

d) $\mathbf{E}(XY) = 15$

4 a) —

b) —

c) —

d) $\mathbf{P}(X_n > t) = e^{-\lambda n \lceil t \rceil}$, $t > 0$ onde $\lceil t \rceil$ é o menor inteiro maior que t

5 —

6 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{X_1^2 + \cdots + X_n^2} = \dfrac{\mu}{\sigma^2 + \mu^2}.$

7 Se X é a nota de um estudante

a) $\mathbf{P}(X > 85) \leq \dfrac{1}{4}$

b) $\mathbf{P}(65 < X < 85) \geq \dfrac{3}{4}$

c) São necessários ao menos 4 estudantes

8 a) A desigualdade Markov não é útil, pois nos dá

$$\mathbf{P}\left(\sum_{n=1}^{20} X_n > 15\right) \leq \frac{4}{3}$$

b) O TCL nos dá

$$\mathbf{P}\left(\sum_{n=1}^{20} X_n > 15\right) = 0{,}8682$$

9 $0{,}3085$

10 $r = \frac{3}{2}$

11 $n = 56$

12 $n \geq 117$

13 $n \geq 23$

14 0

15 $n = 87$

16 —

17 —