Livro

Funções de Uma Variável

Rodney C. Bassanezi

Universidade Federal do ABC

Título: Funções de Uma Variável

Autor: Rodney C. Bassanezi

Santo André,

Sumário

Prefácio

Este texto é dirigido àqueles que, iniciando sua carreira universitária no campo das ciências Exatas, se defrontam com o estudo de Matemática.

Por ser um curso inicial, não necessita de pré-requisitos monumentais, na verdade é uma continuação e muitas vezes uma revisão do programa de Matemática do ensino médio com um pouco mais de rigor. Destina-se a um período curto que pode variar de 45 a 60 horas, dependendo da maneira que se aborda cada tema.

Um dos motivos que nos levou a redigir este texto foi principalmente libertar o aluno da tarefa de copiar as notas de aula, economizando precioso tempo para seu efetivo estudo posterior do assunto. Outra preocupação nossa foi procurar estabelecer um conteúdo mínimo necessário para a continuação de estudos posteriores que utilizam o cálculo diferencial e integral de uma variável.

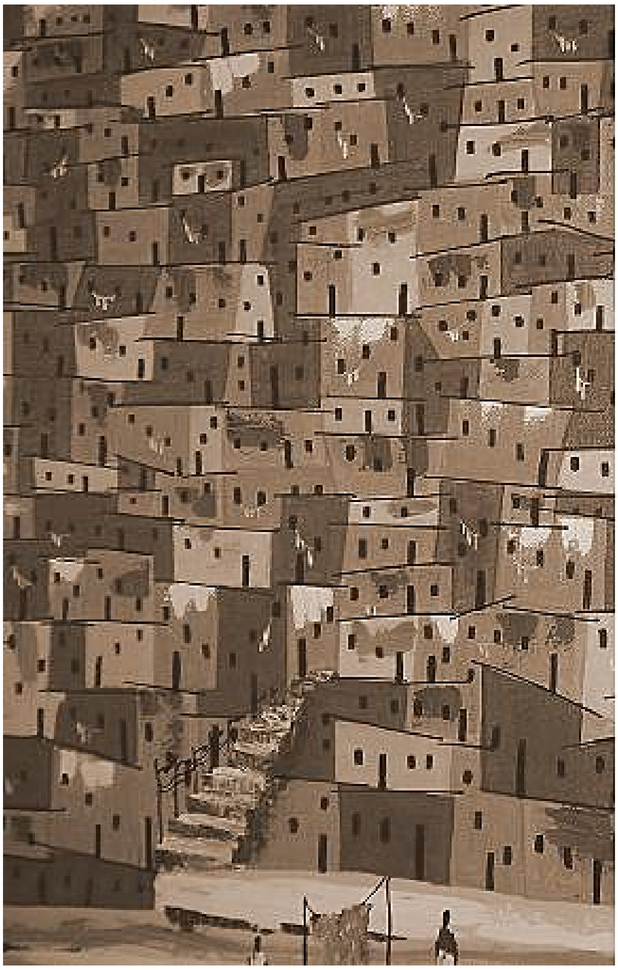
Procuramos, quase sempre, uma linguagem simples com exemplos ilustrativos, vizando facilitar o trabalho do estudante que se propõe aprender sozinho. As respostas dos exercícios propostos nem sempre são fornecidas - acreditamos que o aluno deva procurar enfrentar situações novas sem saber previamente o resultado. Assim os exercícios e as aplicações, em sua colocação gradativa, atendem ao propósito de fornecer novas descobertas quando explorados com algum critério científico.

Fica como responsabilidade dos estudantes as demonstrações de algumas proposições simples e a verificação de muitas questões que são deixadas propositalmente. Isto significa que este texto não deve ser autosuficiente e sim um motivador para estudos mais abrangentes, tanto em relação ao conteúdo de Cálculo como suas implicações.

Este texto foi redigido em 1976 quando o departamento de matemática da Unicamp estava iniciando sua expansão e alguns professores contratados, tinham ainda pouca experiência no ensino de Cálculo. O texto serviu de parâmetro para o ensino-aprendizagem desta disciplina por bastante tempo e agora resolvemos reescrevê-lo com o objetivo principal de diminuir o alto índice de reprovação que se evidencia em nossa universidade.

Cabe a nós a responsabilidade dos erros que seguramente devem existir, assim como o previlégio de agradecer aqueles que os reportarem até nós.

1 Números



"Os números, na simplicidade com que se apresentam, iludem, não raro, os mais atilados... Da incerteza dos cálculos é que resulta o indiscutível prestígio da Matemática".
Malba Tahan - "O Homem que Calculava"

1.1 Noções Gerais - Notações

Toda vez que introduzimos um conceito novo em qualquer assunto da Matemática, devemos estabelecer as definições em termos de conceitos já conhecidos. Assim, para este primeiro curso de Cálculo admitiremos apenas a familiarização com a noção de conjunto, elemento de um conjunto, número e operações com os números (adição, subtração, multiplicação e divisão), além de conceitos elementares de geometria (área, volume etc).

Usaremos alguns símbolos universais que simplificam as idéias:

$=$	igual	ϕ	vazio
$\neq$	diferente	∞	infinito
$\in$	pertence	$\Longrightarrow$	implicação
$\notin$	não pertence	$\Longleftrightarrow$	equivalência
$>$	maior	$\subset$	contido
$<$	menor	$\subsetneq$	contido propriamente
$\geq$	maior ou igual	$\sum$	somatória
$\leq$	menor ou igual	$\int$	integral
I	tal que	$\mathbb{N}$	números naturais
$\forall$	para todo	$\mathbb{Q}$	números racionais
$\exists$	existe	$\mathbb{R}$	números reais
$\nexists$	não existe	Z	números inteiros

O leitor já deve estar habituado com os números naturais, isto é, com o conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$, assim como com as operações definidas em $\mathbb{N}$: adição $(+)$ e multiplicação ($\times$ ou $\cdot$). Entretanto, uma caracterização formal dos números naturais foi dada por Peano[1] que assumiu como "idéias primitivas" as noções de *números naturais*, *um* e *sucessor*, considerando os seguintes axiomas:

A_1. um (1) é um número natural

$$1 \in \mathbb{N}$$

A_2. Todo número natural a tem um, e somente um, sucessor a^+

$$\forall a \in \mathbb{N} \Longrightarrow \exists\ a^+ \in \mathbb{N}$$

[1]Giuseppe Peano logicista e matemático italiano, nasceu a 27 de Agosto de 1858 em Cuneo, Saradinia. Estudou matemática na Universidade de Turim.

A_3. 1 não é sucessor de nenhum número natual

$$\forall a \in \mathbb{N} \Longrightarrow a^+ \neq 1$$

A_4. Se dois números naturais tiverem sucessores iguais então, eles são iguais

$$\forall a, b \in \mathbb{N},\ a^+ = b^+ \Longrightarrow a = b$$

A_5. Seja S um subconjunto de números naturais. Se 1 pertence a S e se o fato de $a \in S$ implicar que seu sucessor também pertence a S, então S é formado por todos os números naturais

$$[S \subseteq \mathbb{N}; 1 \in S; a \in S \Longrightarrow a^+ \in S] \Longrightarrow S = \mathbb{N}$$

Estes axiomas caracterizam o conjunto dos números naturais. O axioma A_5 estabelece o

Princípio da Inducão Completa **:**

Dada uma proposição P, aplicável a $\mathbb{N}$; *Se, mediante um raciocínio matemático, se demonstrar que:*

1) *P é verdadeira para o número* 1;

2) *Dado um número qualquer* $a \in \mathbb{N}$, *se P é verdade para a implicar que P é verdade para* a^+ *então, P é verdade para todos os elementos de* $\mathbb{N}$.

Prova:

Seja $S = \{a \in \mathbb{N}$ tal que $P(a)$ é verdadeira$\}$;

Temos que $1 \in S$ pois $P(1)$ é verdadeira pela hipótese 1.

Seja $a \in S$, isto é, $P(a)$ é verdadeira. Então, pela hipótese 2 temos que $P(a^+)$ é verdadeira logo, $a^+ \in S$. Considerando o axioma A_5 resulta que $S = \mathbb{N}$ e, segue-se que $P(a)$ é verdadeira para todo $a \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.

Vamos mostrar que a soma dos n primeiros números naturais é

$$P(n) = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1.1.1}$$

1) $P(1) = \frac{1(1+1)}{2} = 1 \Longrightarrow P(1)$ é verdadeira;

2) Suponhamos que $1 + 2 + 3 + ... + a = \frac{a(a+1)}{2}$, isto é, $P(a)$ é verdadeira. Então,

$P(a^+) = (1 + 2 + 3 + ... + a) + a^+ = \frac{a(a+1)}{2} + a^+ = \frac{a.a^+ + 2a^+}{2} = \frac{a^+(a^+ + 1)}{2} = P(a^+) \Longrightarrow P(a^+)$ é verdadeira, e portanto, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 1 Mostre que a soma dos quadrados dos primeiros n números naturais é dada pela fórmula

$$P(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{1.1.2}$$

.

No conjunto dos naturais $\mathbb{N}$ nem sempre está definida a operação subtração; De fato, não existe nenhum número natural n tal que

$$n + 3 = 1$$

Exercício 2 Sejam a e r números naturais e seja o conjunto $A = \{a; a+r; a+2r; ...; a+nr\}$. Mostre que a soma dos elementos de A é dada por

$$S_n = (n+1)(a + \frac{nr}{2})$$

O conjunto A é uma progressão aritmética de razão r.

Para resolver esta equação temos necessidade de ampliar o conjunto $\mathbb{N}$ com a introdução dos números negativos e do zero. Passamos assim ao conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$:

$Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Em $\mathbb{Z}$ além das operações de adição e multiplicação, temos também a *subtração*, isto é,

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a - b = c \Longleftrightarrow a = b + c$$

Assim, podemos resolver a equação $n + 3 = 1$, ou seja, $n = 1 + (-3) = -2$.

Devemos observar que todo número natural é também inteiro, isto é,

$$\forall a \in \mathbb{N} \Rightarrow a \in \mathbb{Z}$$

Este fato é denotado por

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

e dizemos que $\mathbb{N}$ é um subconjunto de $\mathbb{Z}$.

Outra operação conhecida é a *divisão* e no conjunto $\mathbb{Z}$ nem sempre é possível dividir; Por exemplo, não existe nenhum número inteiro que seja o resultado da divisão de 1 por 2 apesar de 1 e 2 serem números inteiros. Para possibilitar a resolução de um problema do tipo: "Qual o número x que multiplicado por 2 seja igual a 1", é necessário a ampliação do conjunto $\mathbb{Z}$ para o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, isto é, dos números que podem ser representados na forma $\frac{m}{n}$, onde m e n são números inteiros e $n \neq 0$. Assim,

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \;\middle|\; x = \frac{m}{n}\,; n, m \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

Observe que se $a \in \mathbb{Z}$,então podemos representá-lo por $\frac{a}{1} \in \mathbb{Q}$, ou seja,

$$\forall a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \in \mathbb{Q}$$

e portanto,

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

1.2 Propriedade dos números racionais

Sejam $\frac{p}{q}$ e $\frac{m}{n}$ dois números racionais. Temos

$$\frac{p}{q} = \frac{m}{n} \Longleftrightarrow p.n = q.m \tag{1.2.1}$$

Exemplo: $\frac{30}{7} = \frac{90}{21}$ pois $30.21 = 7.90 = 630$.

Consequência: Cada número racional pode ser representado por uma infinidade de maneiras, pois

$$\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q},\ \frac{a}{b} = \frac{r.a}{r.b} \quad \text{com } (r \in \mathbb{Z}, r \neq 0)$$

Se os números a, b são primos entre si, isto é, $mdc(a,b) = 1$, dizemos que $\frac{a}{b}$ é *irredutível* e representa todos os números racionais $\frac{r.a}{r.b}$, com $r \in \mathbb{Z}, r \neq 0$.

Obs.: O número racional $\frac{-p}{-q}$ é equivalente a $\frac{p}{q}$. Temos também que $\frac{p}{-q}$ é equivalente a $\frac{-p}{q}$.

As operações definidas no conjunto dos racionais $\mathbb{Q}$, bem conhecidas do leitor, são:

Adição:

$$\frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \frac{np + mq}{qn} \tag{1.2.2}$$

Subtração:

$$\frac{p}{q} - \frac{m}{n} = \frac{np - mq}{qn} \tag{1.2.3}$$

OBS.: Se $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ e $p \neq 0$ então existe $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{p}{q} + \frac{x}{y} = 0 \in \mathbb{Q}$. De fato, basta tomar $\frac{x}{y} = \frac{-p}{q}$ pois

$$\frac{p}{q} + \frac{-p}{q} = \frac{pq - pq}{q^2} = \frac{p-p}{q} = \frac{0}{q}$$

Dizemos que $0 = \frac{0}{q} \in \mathbb{Q}, (q \neq 0)$ é o *elemento neutro da adição* em $\mathbb{Q}$ e $\frac{-p}{q}$ é o *elemento oposto* de $\frac{p}{q}$.

Multiplicação:

$$\frac{p}{q} \times \frac{m}{n} = \frac{pm}{qn} \tag{1.2.4}$$

OBS.: Se $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ e $p \neq 0$ então existe $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{p}{q} \times \frac{x}{y} = 1 \in \mathbb{Q}$. De fato, basta tomar $\frac{x}{y} = \frac{q}{p}$ pois

$$\frac{p}{q} \times \frac{q}{p} = \frac{pq}{pq} = 1$$

$\frac{q}{p}$ é denominado *inverso* de $\frac{p}{q}$ e reciprocamente e, o *elemento neutro da multiplicação* $1 \in \mathbb{Q}$ é definido por $1 = \frac{a}{a}$, $a \in \mathbb{Z}, a \neq 0$.

Divisão:

$$\frac{p}{q} \div \frac{m}{n} = \frac{p}{q} \times \frac{n}{m} = \frac{pn}{qm} \text{ com } (p, m \neq 0) \tag{1.2.5}$$

Obs.: Todo número racional $\frac{p}{q}$ pode ser escrito na forma $p.\frac{1}{q}$, e assim $0 \in \mathbb{Q}$ pode ser dado por $0 = 0.\frac{1}{q} = \frac{0}{q}$ e,
$\frac{0}{q}$ não tem inverso, isto é, não existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{0}{q}.x = 1$.

Podemos representar os números racionais geometricamente por pontos de uma reta: Consideramos uma reta onde fixamos um ponto O ao qual chamaremos de *origem* e adotamos uma unidade de medida de comprimento μ. Os números inteiros são múltiplos desta unidade μ e os números racionais são partes fracionárias desta unidade, por exemplo, o número $\frac{13}{5}$ tem em correspondência nesta reta, a distância $2\mu + \frac{3}{5}\mu$. Assim, dado um número positivo x, podemos representá-lo por um ponto M da reta, situado à direita da origem, tal que o segmento $\overline{OM}$ tenha por medida o número $x\mu$. O número negativo $-x$ (oposto de x) é representado pelo ponto N da reta, situado à esquerda da origem O, tal que o segmento $\overline{NO}$ tenha por medida o número $x\mu$. Os números x e $-x$ dizem-se simétricos desde que seus pontos representantes na reta M e N são simétricos em relação à origem.

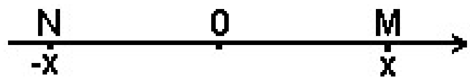


fig.1.1-Representação geométrica dos racionais

Desta forma, a cada número racional corresponde um único ponto da reta.

Pergunta: Dada uma unidade de medida de comprimento μ, a cada ponto da reta podemos também fazer corresponder um número racional? Ou, em outras palavras: todo ponto da reta é imagem de um número racional quando temos uma unidade de comprimento fixa?

A resposta é negativa uma vez que existem pontos da reta que não são correspondentes de números racionais.

Exemplo: Consideremos o quadrado cujo lado mede uma unidade de medida μ. Se d é a medida de sua diagonal, podemos escrever, conforme o Teorema de Ptágoras:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

O número positivo cujo quadrado é 2, é por definição, a *raiz quadrada* de 2, denotado por $\sqrt{2}$, ou seja, $d = \sqrt{2}$.

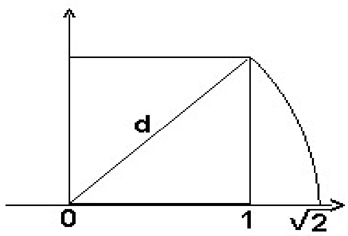


fig.1.2-Representação geométrica dos racionais

Consideremos na reta, à direita da origem, o ponto M tal que o comprimento do segmento $\overline{OM}$ seja igual à d (diagonal do quadrado). Este ponto M é, de acordo com a representação descrita, a imagem do número $d = \sqrt{2}$.

∘Vamos mostrar que o número $\sqrt{2}$ **não** é racional:

Definição 1. *Um número inteiro x é par se puder ser escrito na forma $x = 2z$ para algum número inteiro z. Assim, o conjunto dos números pares P é:*

$$P = \{0; \pm 2; \pm 4; \pm 6..\} \tag{1.2.6}$$

Um número inteiro é ímpar se não for par, portanto, é da forma $y = 2z+1$ para algum z inteiro.

Proposição 1. *Dado um número inteiro a então, a é par se, e somente se, a^2 é par, isto é,*

$$a = 2z \Longleftrightarrow a^2 = 2k \text{ , com } z,k \in \mathbb{Z}$$

Demonstração. ($\Rightarrow$)Suponhamos que $a = 2z \Longrightarrow a^2 = 4z^2 = 2(2z^2) \Longrightarrow a^2$ é par.

($\Leftarrow$)Reciprocamente, se a^2 é par $\Rightarrow a^2 = 2m \Rightarrow a.a = 2m \Rightarrow a = 2.\frac{m}{a} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = \pm 2$ ou $\frac{m}{a} = n \in \mathbb{Z} \Rightarrow a$ é par. □

Para demonstrar que $\sqrt{2}$ não é racional fazemos por absurdo:

Vamos supor que $\sqrt{2}$ seja racional então, podemos escrever $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ $(m, n \in \mathbb{Z};\ n \neq 0)$,considerando a fração $\frac{m}{n}$ na forma irredutível. Logo,

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Longrightarrow m \text{ é par (conforme Prop. 1)}$$

Como m é par, existe um número inteiro p tal que $m = 2p$ logo,

$$m^2 = (2p)^2 = 2n^2 \Longrightarrow 2p^2 = n^2 \Longrightarrow n \text{ é par}$$

Então, se n e m são pares a fração $\frac{m}{n}$ não é irredutível conforme hipótese inicial, absurdo.

Portanto, temos que admitir que $\sqrt{2}$ não pode ser escrito na forma de um número racional, ou seja, $\sqrt{2}$ não é racional.

Concluimos então que existem pontos na reta que não são correspondentes de números racionais. Tais pontos representam geometricamente os números denominados irracionais $\mathcal{L}$. Usualmente é difícil descobrir se um número é racional ou irracional, embora se saiba que existem mais irracionais que racionais. De qualquer maneira, todo ponto da reta é imagem de um número racional ou irracional. A união dos racionais e irracionais constituem os chamados *números reais* $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathcal{L}$$

Pelo que acabamos de ver, conclui-se que existe uma correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos de uma reta orientada, isto é, para cada ponto da reta existe um único número real e vice-versa.

Se um ponto P e um número real x se correspondem, dizemos que x é a *coordenada* de P. É cômodo, em muitos casos, identificar o ponto P com sua coordenada x e usar a linguagem geométrica no tratamento de questões numéricas. Nessas condições dizemos "o ponto x" em vez de "o número x" e "a reta real $\mathbb{R}$" em vez de "o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$".

1.3 Operações com os números reais

Sabemos que no conjunto $\mathbb{R}$ estão definidas duas operações fundamentais: a *adição* que, a cada par de números $x, y \in \mathbb{R}$ associa sua *soma* $x+y$, e a *multiplicação* que associa seu *produto* $x.y$.

Estas operações definidas em $\mathbb{R}$ têm as seguintes propriedades:

A_1) Adição é comutativa:

$$x + y = y + x$$

A_2) A adição é associativa:

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

A_3) Existe um elemento (zero) 0 em $\mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$

$$0 + x = 0$$

A_4) Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe (elemento oposto) $-x \in \mathbb{R}$ tal que

$$x + (-x) = -x + x = 0$$

M_1) A multiplicação é comutativa:

$$x.y = y.x$$

M_2) A multiplicação é associativa:

$$x.(y.z) = (x.y).z$$

M_3) Existe um elemento (unidade) 1 em $\mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$

$$1.x = x$$

M_4) Para todo $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ existe (elemento inverso) $x^{-1} = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ tal que

$$x.x^{-1} = x^{-1}.x = 1$$

D) A multiplicação é distributiva relativamente à adição:

$$x.(y+z) = x.y + x.z$$

Agora, a partir das propriedades das operações fundamentais, podemos definir suas operações inversas:

Subtração: É a "operação" inversa da adição

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x - y = z \Longleftrightarrow x = z + y$$

Podemos observar que esta operação sempre tem solução em $\mathbb{R}$ pois em $(z + y = x)$ somamos o número $(-y)$ em ambos os membros e obtemos;

$$z + y + (-y) = x + (-y) \Longleftrightarrow z + 0 \Rightarrow x + (-y) \Longleftrightarrow z = x - y$$

O número z é chamado *diferença* entre x e y.

Divisão: É a "operação" inversa da multiplicação

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \div y = z \Longleftrightarrow x = z.y$$

z pode ser dado por $z = x.y^{-1}$ que está sempre definido quando $y \neq 0$.

Exercícios

1. Prove que $\sqrt{3}$ é um número irracional.
2. Verifique se $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^3 = 9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}$.
3. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$–Suponhamos que $b > 0$ e $d > 0$ não sejam quadrado-perfeitos então, mostre que

$$a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d} \Longrightarrow (a = c) \text{ e } (b = d)$$

4. Prove, usando indução completa, que se $n \in \mathbb{N}$,

$$(x.y)^n = x^n.y^n$$

5. Mostre que, para todos números reais x, y, z

- a) $x(y-z) = xy - yz$
- b) $x.0 = 0$
- c) $x + y = x + z \Longrightarrow y = z$

6. Mostre que se $x.y = 0$ então $x = 0$ ou $y = 0$.
7. Mostre que

$$\sum_{n=1}^{k} n^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Desigualdades

Um número $a \in \mathbb{R}$ é *positivo* se $a \neq 0$ e pode ser representado geometricamente sobre a reta à direita da origem.

Notação: $a > 0$ (lê-se a maior que zero).

Os números positivos gozam das seguintes propriedades fundamentais:

P_1. Se $a > 0$ e $b > 0$ então $a + b > 0$ e $ab > 0$.

P_2. Se $a \in \mathbb{R}$ então $a = 0$ ou $a > 0$ ou $-a > 0$.

Se $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e a não é positivo, dizemos que a é *negativo* e escrevemos $a < 0$.

Obs.: Conforme a propriedade P_2, se um número x é negativo então $-x$ é positivo e, reciprocamente, isto é,

$$x < 0 \Longleftrightarrow -x > 0$$
$$x > 0 \Longleftrightarrow -x < 0$$

Definição- Sejam a e b números reais, dizemos que *a é maior que b* se $a - b > 0$.

Notação: $a > b$.

Neste caso, dizemos que *b é menor que a* e escrevemos $b < a$.

Uma relação entre dois números expressa pelo símbolo $<$ (ou $>$) diz-se uma desigualdade. O cálculo das desigualdades baseia-se nas seguintes propriedades:

1) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$ ou $a = b$ ou $a < b$.

Prova: Decorre imediatamente de P_2, pois

$$\begin{aligned} a-b=0 &\Rightarrow a=b \quad \text{ou} \\ a-b>0 &\Rightarrow a>b \quad \text{ou} \\ -(a-b)>0 &\Rightarrow -a>b \end{aligned}$$

2) Se $a>b$ e $b>c \Rightarrow a>c$

Prova: Temos que $a-b>0$ e $b-c>0$ então pela pela P_1,tem-se $(a-b)+(b-c)>0 \Rightarrow a-(b-b)-c>0$, ou seja, $a-c>0 \Longleftrightarrow a>c$.

3) Se $a>b$ então $a+c>b+c$ para todo $c\in\mathbb{R}$

Prova: Temos $a-b>0 \Rightarrow (a+c)-(b+c)>0 \Rightarrow (a+c)>(b+c)$

4) Se $a>b$ e $c>0$ então $ac>bc$

Prova: Temos $a-b>0$ e $c>0 \Rightarrow (a-b)c>0$ (Cf. P_1) $\Rightarrow ac-bc>0 \Rightarrow ac>bc$.

Outras propriedades são deixadas como exercício;

Exercícios - Mostre que:

1) Se $a>b$ e $c<0 \Rightarrow ac<bc$.
2) Se $a<b$ e $b<c \Rightarrow a<c$.
3) Se $a<b$ e $c>0 \Rightarrow ac<bc$.
4) Se $a<b \Rightarrow a+c<b+c, \forall c\in\mathbb{R}$.
5) Se $a<b$ e $c<0 \Rightarrow ac>bc$.
6) Se $a>1 \Rightarrow a^{-1}<1$.
7) Se $a>0 \Rightarrow a^{-1}>0$.
8) Se $a>0$ e $b>0 \Rightarrow ab>0$.
9) Se $a<0$ e $b<0 \Rightarrow ab>0$.
10) $a>0$ e $b<0 \Rightarrow ab<0$.

Exemplos de aplicação a) Encontrar os números reais que satisfazem a desigualdade

$$2x-\frac{3}{2}>1 \tag{1.3.1}$$

Solução: Somando $\frac{3}{2}$ a ambos os membros da desigualdade 1.3.1, (cf. propriedade 3) temos $2x>1+\frac{3}{2} \Longleftrightarrow 2x>\frac{5}{2}$. Agora, multiplicando ambos os membros por $\frac{1}{2}>0$, temos (cf. prop. 4) que $x>\frac{5}{4}$.

b) Mostrar que todo número real x que satisfaz a desigualdade

$$x > 1$$

também satisfaz

$$\frac{x+3}{x-1} > 0$$

Solução: Se $x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow (x-1) + 4 > 4 > 0 \Rightarrow x + 3 > 0$.

Agora, $\frac{x+3}{x-1} = (x+3)(x-1)^{-1} > 0$ pois o produto de dois números positivo é positivo (Cf exercício 8) e portanto, $\frac{x+3}{x-1} > 0$.

Observamos que a recíproca não é verdadeira, de fato:

$\frac{x+3}{x-1} > 0 \Longleftrightarrow [(x+3) > 0 \text{ e } (x-1) > 0]$ ou $[(x+3) < 0 \text{ e } (x-1) < 0]$. Assim, se considerarmos o segundo termo entre colchetes temos $[(x+3) < 0 \text{ e } (x-1) < 0] \Longleftrightarrow x < -3$ e $x < 1 \Rightarrow x < -3$.

Logo, $\frac{x+3}{x-1} > 0 \not\Rightarrow x > 1$.

Uma propriedade que distingue os números racionais dos inteiros é que entre duas frações distintas, mesmo bem próximas, podemos sempre encontrar uma outra diferente delas; Basta tomar a média entre elas:

$$\text{Se } \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ então } \frac{a}{b} < \frac{ad+bc}{2bd} < \frac{c}{d} \quad \text{(verifique!)}$$

1.4 Intervalos Reais

Sejam a e b números reais distintos e suponhamos que $a < b$ - O conjunto de todos os números reais x compreendidos entre a e b é denominado *intervalo aberto* de extremidade inferior a e extremidade superior b, e denotado por (a, b).

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} |\ a < x < b\} \tag{1.4.1}$$

Se as extremidades pertencem ao intervalo, será denominado *intervalo fechado* e denotado por $[a, b]$,

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x \leq b\} \tag{1.4.2}$$

Definimos ainda os intervalos semi abertos:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x < b\} \tag{1.4.3}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

e os intervalos infinitos ou semi-retas:

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$

$$
\begin{aligned}
(-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} \\
(a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \qquad (1.4.4) \\
(-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}
\end{aligned}
$$

O símbolo ∞ lê-se infinito e não representa nenhum número real.

A reta toda, isto é, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais pode ser também expresso como um intervalo infinito:

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

1.5 Valor Absoluto

Já vimos que a cada $x \in \mathbb{R}$ corresponde um ponto M da reta orientada. Quando $x > 0$ então M está à direita da origem O e, estará à esquerda quando $x < 0$. Quando $x = 0$ então M é a origem. Em qualquer caso podemos falar da distância de M à origem O, que é a *medida* do comprimento do segmento $\overline{OM}$ segundo a unidade μ adotada. Desta forma, a distância será sempre positiva, sendo nula apenas quando $M = O$.

Chamaremos de *valor absoluto ou módulo* de $x \in \mathbb{R}$, e indicamos com o símbolo $|x|$, a distância do ponto M (representante do número x) à origem, isto é,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \ \ x \geq 0 \\ -x & \text{se} \ \ x < 0 \end{cases}$$

Portanto, $|x| \geq 0$ qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, e $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

Exemplo 1. $|3| = 3$ *e* $|-3| = 3$

Exemplo 2. $|1 - \pi| = -(1 - \pi) = \pi - 1 = |\pi - 1|$

Proposição 2. *Para todo* $x \in \mathbb{R}$, *temos* $|x| = |-x|$

Demonstração. : Se $x > 0$, então $-x < 0 \Rightarrow |-x| = -(-x) = x = |x|$ □

Se $x < 0$, então $-x > 0 \Rightarrow |-x| = -x = |x|$

Proposição 3. *Para todo $x \in \mathbb{R}$,*

$$|x|^2 = x^2 \quad e \quad |x| = \sqrt{x^2}$$

Demonstração. : Se $x \geq 0$, então $|x| = x \Rightarrow |x|^2 = x^2$

Se $x < 0$, então $|x| = -x \Rightarrow |x|^2 = (-x)^2 = x^2$

Portanto, em ambos os casos,tomando-se a raíz quadrada (positiva), temos

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Proposição 4. *Se $x, y \in \mathbb{R}$, $\left|xy\right| = |x|\left|y\right|$*

Demonstração. : usando a Proposição anterior temos

$\left|xy\right| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x|\left|y\right|$. □

Proposição 5. *Se $x, y \in \mathbb{R}$, então*

$$\left||x| - \left|y\right|\right| \leq \left|x+y\right| \leq |x| + \left|y\right|$$

Demonstração. : Temos que para todo par de números reais x, y $\in \mathbb{R}$

$x.y \leq \left|xy\right| = |x|\left|y\right|$ e, portanto, $2x.y \leq 2\left|xy\right|$

Consideremos

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x|\left|y\right| + y^2 = x^2 + 2|x|\left|y\right| + y^2 = \left(|x| + \left|y\right|\right)^2$

Logo, $(x+y) \leq |x| + \left|y\right|$, o que prova a segunda parte da desigualdade.

Por outro lado, temos

$$|x| = \left|x+y-y\right| \leq \left|x+y\right| + \left|-y\right| = \left|x+y\right| + \left|y\right|$$

$$\Longrightarrow |x| - \left|y\right| \leq \left|x+y\right|$$

□

Analogamente mostra-se que

$$\left|y\right| - |x| \leq \left|x+y\right|$$

Portanto,

$$\left||x| - \left|y\right|\right| \leq \left|x+y\right|$$

Exemplo 3. *Determinar os valores de x que satisfazem a desigualdade*

$$\left|x+\sqrt{2}\right|>1$$

Solução: *Se* $x+\sqrt{2}\geq 0 \Rightarrow \left|x+\sqrt{2}\right| = x+\sqrt{2}$ *e, portanto,* $\left|x+\sqrt{2}\right|>1 \Leftrightarrow x+\sqrt{2}>1 \Rightarrow x>1-\sqrt{2}$

Se $x+\sqrt{2}<0 \Rightarrow \left|x+\sqrt{2}\right| = -\left(x+\sqrt{2}\right)$ *e, portanto,* $\left|x+\sqrt{2}\right|>1 \Leftrightarrow -\left(x+\sqrt{2}\right)>1 \Rightarrow -x>1+\sqrt{2}$

Assim, os valores de x devem satisfazer as duas desigualdade

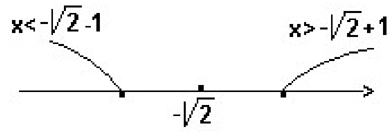
$$x+\sqrt{2}<0 \Rightarrow x<-\sqrt{2}$$
$$-x>1+\sqrt{2} \Rightarrow x<-1-\sqrt{2}$$

Logo, as duas desigualdades são satisfeitas se

$$x<-1-\sqrt{2}$$

Juntando os dois casos, podemos concluir que

$$\left|x+\sqrt{2}\right|>1 \Longleftrightarrow \left[x<-1-\sqrt{2}\right] \quad ou \quad \left[x>1-\sqrt{2}\right]$$



$fig.1.3$ – *Solução da desigualdade*

Consequência: $\left|x+\sqrt{2}\right|\leq 1 \Longleftrightarrow -1-\sqrt{2}\leq x\leq 1-\sqrt{2}$

□

Exercícios

Resolva as desigualdades

1) $(x+1).(x-1)\leq 0$

2) $\frac{x+1}{x^2}>0$

3) $|x-3|\leq 2$

4) $|x-2| \leq |x+3|$

5) Mostre que $|x^n| = |x|^n$, $n \in \mathbb{N}$.

6) Verifique se, para todo par $x, y \in \mathbb{R}$, vale

$$\left|x-y\right| \leq \left|x+y\right|$$

Observação: Podemos definir a distância entre dois pontos x_1 e x_2 da reta $\mathbb{R}$ por:

$$d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$$

Desta forma, o conjunto dos pontos cuja distância de um ponto dado x_0 é menor que um valor r, coincide com o intervalo aberto $(x_0 - r, x_0 + r)$, isto é,

$$d(x, x_0) = |x - x_0| < r \Leftrightarrow x \in (x_0 - r, x_0 + r) \tag{1.5.1}$$

O intervalo $(x_0 - r, x_0 + r)$ é denominado vizinhança de x_0 de raio r.

"...eu ataquei o problema da catenária, que ainda não tinha tentado, e com minha chave [o Cálculo Diferencial] alegremente abri seu segredo".

G.W.Liebnitz - Acta eruditorium(1690)

2.1 Noções Gerais

Definição 2. *Uma* função *(real de variável real) é uma regra f que a cada número real x de algum subconjuto $A \subset \mathbb{R}$, associa outro número real y, de maneira única e sem excessão.*

Notação: $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$,
$$x \longmapsto y = f(x)$$
E, lê-se função a f está definida no conjunto A com valores reais. O conjunto A é chamado *domínio* de f e denotado por $A = dom(f)$;

x é a *variável independente* e $y = f(x)$ é o valor de f no ponto x ou *variável dependente.*

A idéia fundamental de função é que, conhecido o valor da variável independente, fica bem determinado o valor de $y = f(x)$.

O conjunto

$$\mathrm{Im}_A(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \,\middle|\, \exists x \in A,\ y = f(x) \right\} = f(A)$$

é denominado *imagem* de A pela função f. A imagem do domínio de f é simplesmente denotada por $\mathrm{Im}(f)$, isto é, $\mathrm{Im}(f) = f(dom(f))$

Exemplos;

1. A área de um quadrado depende do comprimento do seu lado, isto é, a cada valor do lado do quadrado correspondeum único valor da área deste. Desde que a área y de um quadrado de lado x é x^2, podemos escrever

$$y = x^2$$

2. Se a cada valor de x associarmos seu módulo, temos a função

$$|.| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = |x|$$

A imagem de $\mathbb{R}$ pela função módulo $|.|$ é o conjunto dos números reais não negativos $\mathbb{R}^+$.

3. Se associarmos a cada valor real $x \neq 0$ o seu inverso $\frac{1}{x}$, isto é, $y = f(x) = \frac{1}{x}$ então o domínio de f é o conjunto $A = \mathbb{R} - \{0\}$ e sua imagem é $I = \left\{ y \in \mathbb{R} \,\middle|\, y = f(x) = \frac{1}{x} \right\} = \mathbb{R} - \{0\}$.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbf{Z}$ definida por $f(x) = [x]$, onde $[x]$ significa o maior inteiro menor ou igual a x. Neste caso, $dom(f) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}(f) = \mathbf{Z}$.

Obs.: Quando nos referimos a uma função sem declarar explicitamente seu domínio, estaremos considerando este como sendo o conjunto de todos os números reais x tais que exista o número real $f(x)$, obtido pela regra que define a função f.

Podemos observar também que em alguns exemplos dados as funções foram representadas por meio de equações algébricas (ou fórmulas). As funções dadas por fórmulas ou equações algébricas são mais simples de se manejar. Entretanto, nem todas as funções podem ser representadas desta maneira (vide exemplo 4).

5. Seja $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x > 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ x+1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

Esta regra define perfeitamente a função f, cujo domínio é $\mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$. Neste caso, a função é dada por fórmulas, mas não existe uma fórmula única que sirva para todo o domínio da função.

6. Seja a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

7. Se a cada $x \in \mathbb{R}$ associamos $y \in \mathbb{R}$ tal que $y^2 = x$ obtemos uma regra que *não define uma função em* $\mathbb{R}$, uma vez que para um mesmo valor de x podemos associar até dois valores distintos para y. Por exemplo, para $x = 9$ podemos associar os números $y = 3$ ou $y = -3$.

Entretanto se considerarmos o domínio de f como sendo o conjunto unitário $A = \{0\}$, então existe um único $y \in \mathbb{R}$ tal que $y^2 = 0$ e, neste caso, f seria uma função com $dom(f) = \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

8. Se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, então f é denominada uma **sequência** e é denotada por $f(n) = \{x_n\}$.

Exemplos:

$$
\begin{aligned}
x_n &= \frac{1}{n} \Longrightarrow \{x_n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\right\} \\
x_n &= \frac{n}{1+n^2} \Longrightarrow \{x_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \dots, \frac{n}{1+n^2}, \dots\right\} \\
x_n &= \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \Longrightarrow \{x_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots\right\} \\
x_n &= 5^{\frac{1}{2n}} \Longrightarrow \{x_n\} = \left\{\sqrt{5}, \sqrt{\sqrt{5}}, \dots, \sqrt[2n]{5}, \dots\right\} \\
x_n &= \begin{cases} -1 \text{ se } n \text{ é ímpar} \\ 1 \text{ se } n \text{ é par} \end{cases} = (-1)^n
\end{aligned}
$$

2.2 Gráfico de uma função

Já vimos que existe uma correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos de uma reta. Tomemos agora uma segunda reta do plano, passando pela origem da primeira e que seja perpendicular a esta. Podemos também fazer corresponder a cada ponto desta segunda reta um, e somente um, número real, de maneira análoga ao que já foi feito anteriormente. Na reta vertical, os pontos que estão acima da origem são correspondentes aos números reais positivos e os abaixo correspondem aos negativos. A reta horizontal é denominada *eixo-x* ou das **abscissas** e a vertical *eixo-y* ou das **ordenadas**. Estas retas constituem um sistema denominado **coordenadas cartesianas** do plano $\mathbb{R}^2$, determinado pelos eixos-coordenados (abscissa e ordenada).

Dado um par de números reais a, b existe um, e somente um, ponto do plano $\mathbb{R}^2$ com abscissa a e ordenada b. Para determinar tal ponto basta considerar a intersecção de duas retas, uma paralela ao $eixo-y$ passando pelo ponto a do $eixo-x$, e outra paralela ao $eixo-x$ passando pelo ponto b do $eixo-y$. Tal ponto será denotado por $P(a,b)$.

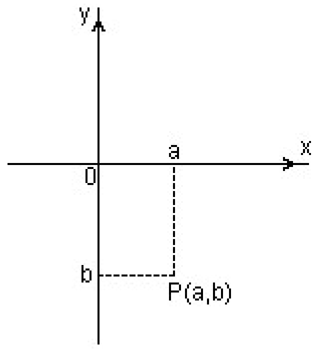


fig.2.1-Representação de um ponto no sistema de eixos-coordenados

Reciprocamente, dado um ponto qualquer do plano $\mathbb{R}^2$, podemos sempre determinar univocamente suas coordenadas - basta traçar retas paralelas aos eixos-coordenados, passando pelo ponto dado.

Definição: Seja f uma função real. Definimos o *gráfico de f* como o conjunto dos pares $(x, f(x))$ do plano $\mathbb{R}^2$, correspondentes a todos os números x do domínio de f,

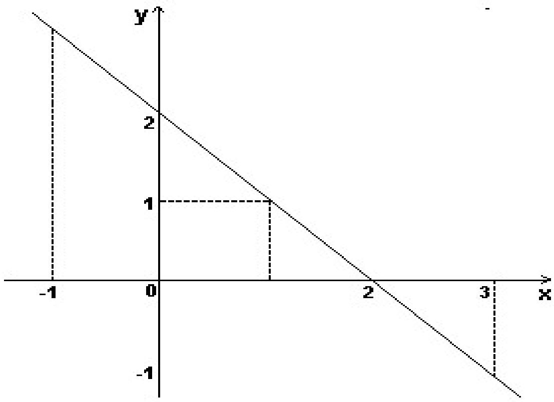
$$Graf(f) = \{(x, f(x));\ \ x \in dom(f)\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = f(x)\right\}$$

O gráfico é uma "imagem geométrica" da função, que pode fornecer várias propriedades dela, tornando-se um elemento de grande utilidade para seu estudo. Para construir o gráfico de uma função $f(x)$, podemos determinar os pares $(x, f(x))$ para alguns valores de $x \in dom(f)$. O gráfico de uma função f é, muitas vezes, uma curva do plano, que poderá ser desenhada com mais perfeição quanto maior for o número de pontos empregados e quanto mais próximos estiverem entre si.

Exemplos 1. Seja $f(x) = -x + 2$ para $x \in [-1, 3]$.

Podemos inicialmente determinar uma tabela de valores dos pares $(x, f(x))$ e situá-los no plano $\mathbb{R}^2$:

x	$f(x)$
-1	3
0	2
0,5	1,5
1	1
2	0
3	-1



$fig.2.2$ – Representação gráfica da reta

Observamos que a função $g(x) = -x+2$ (definida em todo $\mathbb{R}$), apesar de ter a mesma expressão da função $f(x)$ anterior, difere desta porque seus domínios são distintos. O domínio de f, que é o intervalo $[-1,3]$ está contido no domínio de g que é a reta toda. Assim, podemos dizer que $g(x) = f(x)$ se $x \in [-1,3]$. Para expressar situações deste tipo dizemos que a função f é uma *restrição de* g ao intervalo $[-1,3]$.

2. Seja $f(x) = x^2$, o gráfico da restrição de f ao intervalo $[-2,2]$ é uma parábola

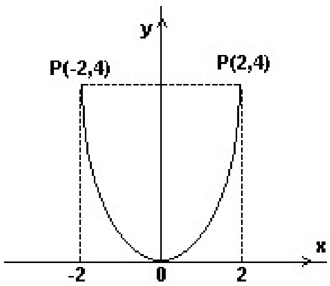


fig 2.3-Gráfico da parábola definida por f

O gráfico de uma função é muito útil para o estudo de suas propriedades pois sintetiza-as numa figura, e vice-versa, o estudo de uma função fornece elementos que facilitam a construção de seu gráfico, além de dar informações precisas sobre o mesmo.

Um dos objetivos deste curso é fornecer os elementos que relacionam as funções e seus gráficos e que facilitam as suas construções sem a necessidade de desenhá-los ponto-a-ponto como é feito num computador.

Observamos que nem todas as funções reais podem ter seus gráficos desenhados (vide Exemplo 6).

Exercícios: 1. Verifique quais das relações nos dão y como função de x; Determine seus domínios e imagens.

a) $y = x^2 - 1$

b) $y = |x - 3|$

c) $y = x^{\frac{3}{2}}$

d) $y = \sqrt{x}$

e) $y = \sqrt{25 - x^2}$

f) $y^2 = 1 - x^2$

2. Esboce os gráficos das seguintes funções

g) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

h) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \geqslant 0 \\ -x^2 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$

i) $f(x) = [x]$

j) $f(x) = senx$

2.3 Funções Elementares

Função elementar é aquela que pode ser representada por uma única fórmula do tipo $y = f(x)$.

As funções elementares podem ser classificadas como funções algébricas e funções transcendentes. As **funções algébricas** incluem as seguintes:

Funções polinomiais

Uma função polinomial é da forma

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^{n-i}$$

onde, a_i, $i = 0, 1, 2, ..., n$, são constantes reais denominadas *coeficientes* e $n \in \mathbb{N}$ é o *grau do polinômio* $P(x)$ se $a_0 \neq 0$.

Uma função polinomial é definida para todo $x \in \mathbb{R}$, isto é, $dom(P) = \mathbb{R}$. Por outro lado, $\text{Im}(P) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \mathbb{R}^+ & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$.

Exemplos: **Polinômio de grau 1**

$$P(x) = ax + b$$

Um polinômio de grau1 é também chamado de *função linear* uma vez que seu gráfico é uma reta cujo *coeficiente angular* é a e que intersepta o eixo-y no ponto b.

Lembramos que o coeficiente angular de uma reta é o valor da tangente do ângulo α formado pela reta e o eixo-x:

$$a = tg\ \alpha$$

Ainda, se $b = 0$, a função linear se reduz a $y = ax$ que é uma reta passando pela origem. Se $a = 0$, a função linear se reduz à função constante $f(x) = b$, que é uma reta paralela ao eixo-x.

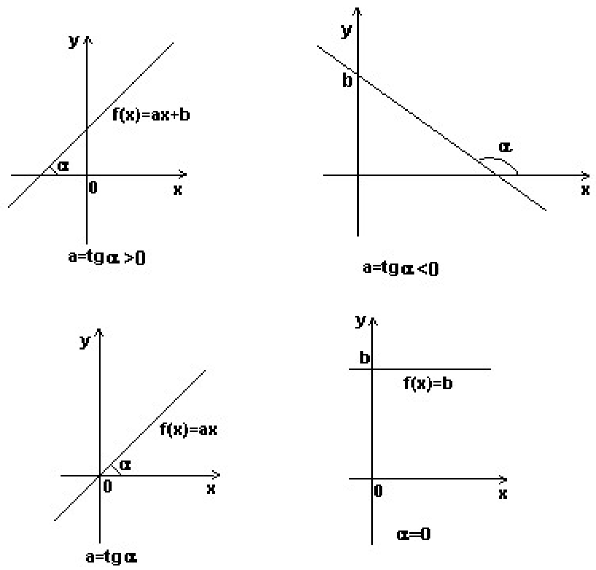


fig 2.4-Polinômio de primeiro grau (equação da reta)

Se o ângulo α é tal que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então a reta é crescente pois seu coeficiente angular é positivo: $tg\alpha > 0$;

Se o ângulo α é tal que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, então a reta é decrescente pois seu coeficiente angular é negativo: $tg\alpha < 0$;

Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, a reta é perpendicular ao eixo$-x$ e, neste caso, não é dada por uma função pois $tg\frac{\pi}{2}$ não está definida.

Polinômio de segundo grau

$$f(x) = ax^2 + bx + c;\ (a \neq 0)$$

Um polinômio de grau 2 também é chamado de *função quadrática* e seu gráfico é uma *parábola.*

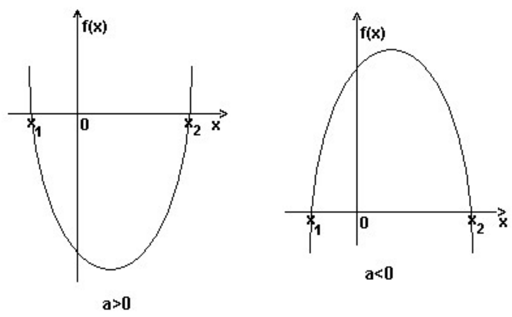


fig. 2.5-Funções quadráticas

Os pontos onde a curva corta o eixo-x são denominados *raízes da equação* e são obtidos quando $f(x) = 0$. Uma função quadrática tem, no máximo, 2 raízes reais distintas x_1 e x_2, que são dadas pela fórmula de Baskara:

$$x_i = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Polinômio do terceiro grau Um polinômio de grau 3 tem a fórmula geral dada por:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Um polinômio de terceiro grau tem, no máximo, 3 raízes reais distintas e um método para determiná-las foi desenvolvido por Cardano e apresentado por Tartaglia (vide [1],[2],[3]).Observamos que se o polinômio é de grau maior que 3 então, não existe um método geral para determinar suas raízes.

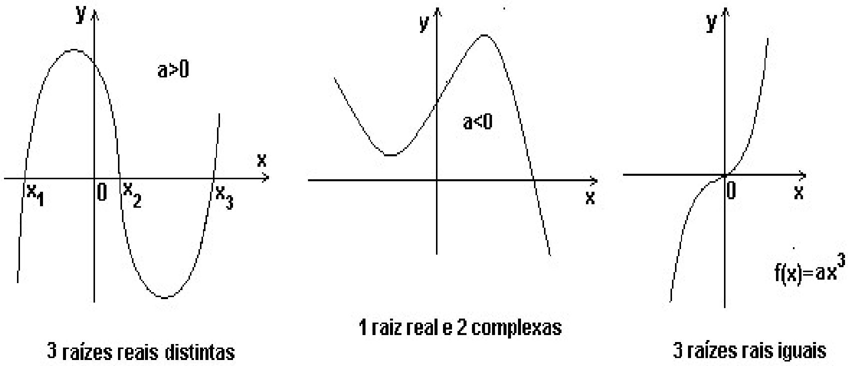


fig.2.6-Polinômios do terceiro grau

2.3.1 Funções racionais

Uma função racional é definida como o quociente entre duas funções polinomiais

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + ... + b_{m-1}x + b_m} = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}}{\sum_{j=0}^{n} b_j x^{m-j}}$$

O domínio de uma função racional é todo $\mathbb{R}$ menos as raízes do polinômio denominador $Q(x)$, isto é,

$$dom(f) = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) = 0\}.$$

x^* é raiz de $f(x)$ se, e somente se, $P(x^*) = 0$ e $Q(x^*) \neq 0$.

Exemplo

$$f(x) = \frac{a}{x}$$

Neste caso, $dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

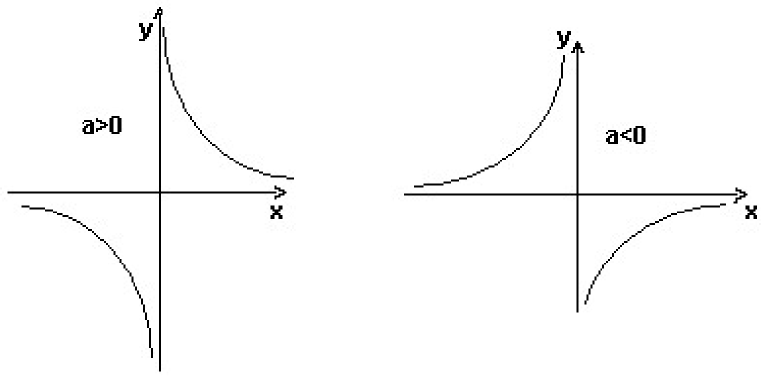


fig.2.7-Gráficos da função racional $f(x) = \dfrac{a}{x}$

2.3.2 Funções irracionais

Dizemos que uma função real f é irracional quando a variável independente x aparece na fórmula de $y = f(x)$ com expoente racional.

Exemplos: a) $f_1(x) = \sqrt{x}$ e $f_2(x) = -\sqrt{x}$

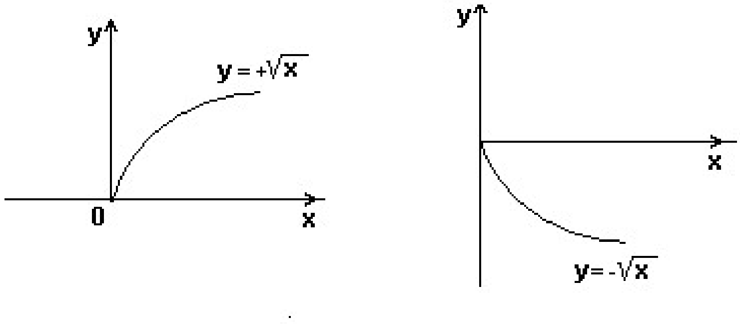


fig.2.8-Gráficos das funções racionais

b) $f_3(x) = x^{\frac{2}{3}}$ com $x \in [-8, 8]$:

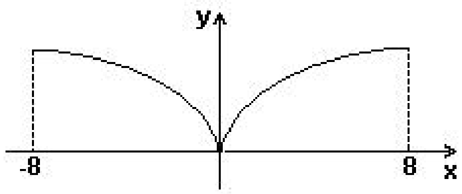


fig.2.9-Gráfico de $x^{\frac{2}{3}}$

c) $f_4(x) = \frac{2x^3+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2+1}}$

2.3.3 Distância entre dois pontos do plano $\mathbb{R}^2$

A distância entre dois pontos quaisquer do plano é o comprimento do segmento de reta que os une. Vamos deduzir uma fórmula para o cálculo desta distância em função das coordenadas dos dois pontos:

Sejam $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, a distância entre eles $d = \overline{P_1P_2}$ pode ser calculada, usando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de vértices P_1, P_2 e V da fig. 2.10.

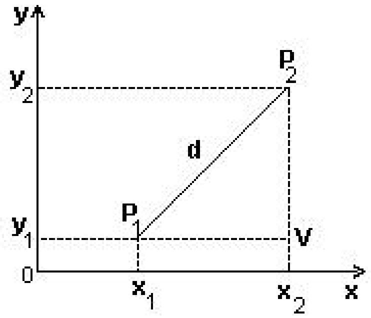


fig.2.10-Distância entre dois pontos do plano

Assim,
$$d^2 = \overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_2V}^2 + \overline{P_1V}^2 = |y_2 - y_1|^2 + |x_2 - x_1|^2$$
ou
$$d = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

Exemplos: 1) Sejam $P_1(1,1)$ e $P_2(2,0)$, então $d = \overline{P_1P_2} = \sqrt{(2-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$

2) Se $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (a,b) \Longrightarrow d = \sqrt{a^2 + b^2}$ que é a fórmula da distância da origem a qualquer ponto $P(a,b)$ do plano.

Observação: Se f é uma função, então podemos formar a equação $[F(x,y) = y - f(x) = 0]$ cujo gráfico é o mesmo da função $y = f(x)$. Entretanto, existem equações do tipo $F(x,y) = c$ que não são obtidas de uma função $y = f(x)$. Por exemplo a equação
$$x^2 + y^2 = d^2$$
que, geometricamente, significa o quadrado da distância do ponto (x,y) à origem $(0,0)$.

Todos os pontos (x,y) que satisfazem à equação estão a uma distância fixa d da origem e portanto, formam uma circunferência de centro na origem e raio d

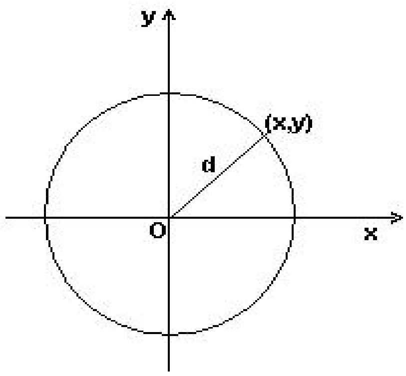


fig.2.11-Circunferência de centro na origem e raio d

Exercício: Determinar a equação da circunferência ? de centro no ponto $(2,-1)$ e raio 3.

Solução: basta determinar todos os pontos (x,y) que distam de $(2,-1)$ de 3, isto é,

$$3 = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} \Longrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$$

De uma maneira geral, podemos dizer que a equação

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

é a equação de uma circunferência de centro no ponto (a,b) e raio r.

2.3.4 Funções Transcendentais

Como funções transcendentais vamos estudar neste capítulo, as funções trigonométricas e posteriormente as funções exponencial e logarítmo.

Funções Trigonométricas Suponhamos dados os eixos coordenados e um certo ângulo α (fig. 2.12)

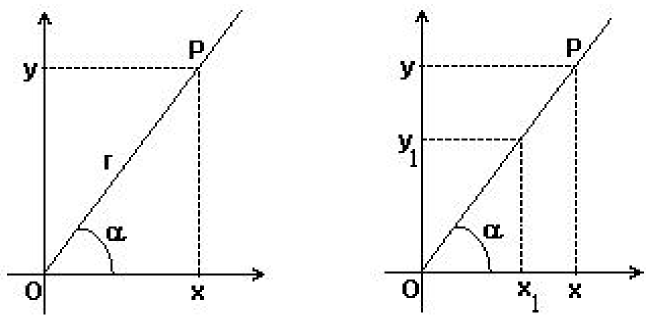


fig.2.12-Ângulo

Seja $(x, y) \neq (0, 0)$ um ponto qualquer da reta que determina o ângulo, então a distância de (x, y) à origem é dada por $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Definimos

$$seno\ \alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$cosseno\ \alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Vamos mostrar que o valor do *seno* α não depende da escolha do ponto (x, y) sobre a reta que determina α. De fato, seja (x_1, y_1) um outro ponto sobre a mesma reta, então existe um número $c \neq 0$ tal que $x_1 = cx$ e $y_1 = cy$.

Portanto,

$$\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = \frac{cy}{\sqrt{c^2x^2 + c^2y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = seno\ \alpha$$

Analogamente para o *cosseno* α.

Variações do *seno* α **e do** *cosseno* α Se o ponto $P(x, y)$ está no primeiro ou no segundo quadrante então $y > 0$;

Se o ponto $P(x, y)$ está no terceiro ou quarto quadrante então $y < 0$;

Se o ponto $P(x, y)$ está no primeiro ou no quarto quadrante então $x > 0$;

Se o ponto $P(x, y)$ está no segundo ou no terceiro quadrante então $x < 0$.

Definição 3. *Seja* π *a área de um círculo de raio 1. Vamos escolher como unidade de ângulo aquela cujo ângulo raso mede* π *vezes esta unidade. Tal unidade de ângulo é chamada radiano.*

Vamos calcular o valor do *seno* α e do *cosseno* α para alguns ângulos:

α	*seno* α	*cosseno* α
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0
π	0	-1
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0

Proposição 6. *Para qualquer ângulo α tem-se*

(a) $cosseno\ \alpha = seno\ (\alpha + \frac{\pi}{2})$

(b) $seno\ \alpha = -cosseno\ (\alpha + \frac{\pi}{2})$

Prova: Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer do plano e α o ângulo determinado pela reta OP e o eixo-x.Consideremos um ponto $Q(x_1,y_1)$ tal que o ângulo determinado pela reta OQ seja $(\alpha + \frac{\pi}{2})$. Suponhamos também que $\sqrt{x_1^2+y_1^2} = \sqrt{x^2+y^2}$, isto é, as distâncias de P e de Q à origem são iguais. Logo, os triângulos OPA e OQB são iguais (veja fig. 2.13) e portanto, $x = y_1$ e $y = -x_1$.

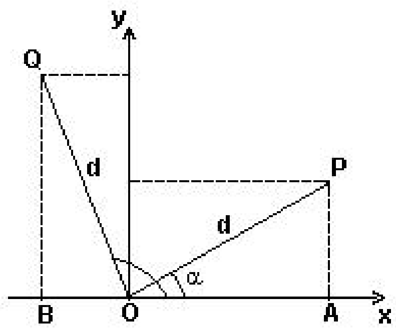


fig.2.13-Ângulos complementares

Então,

$$cosseno\ \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}} = seno(\alpha + \frac{\pi}{2})$$

$$seno\ \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}} = -cosseno(\alpha + \frac{\pi}{2})$$

Definição 4. *Para todo $x \in \mathbb{R}$ podemos associar um número que é o seno de x radianos e denotamos esta função por senx. Analogamente, temos uma função que associa a cada número real o cosseno do ângulo de x radianos: $y = \cos x$.*

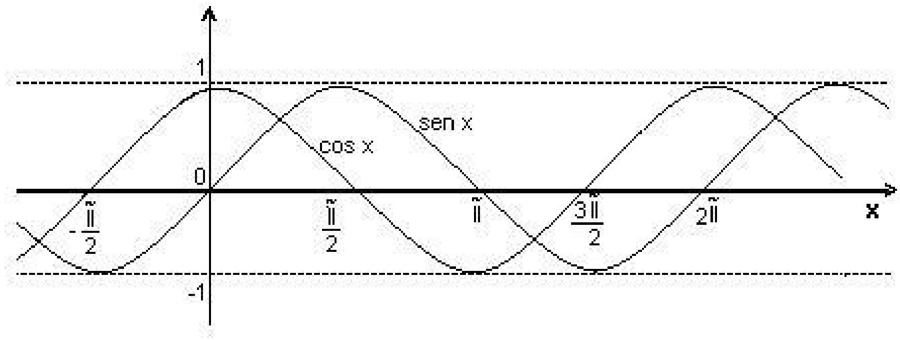


fig.2.14-Gráficos das funções senx e cosx

Definição 5. *Definimos ainda*

$$tgx = \frac{senx}{\cos x}$$

denominada função tangente *e definida para todo* $x \in \mathbb{R}$ *com* $x \neq \pm\frac{(2n+1)\pi}{2}, n \in \mathbb{N}$.

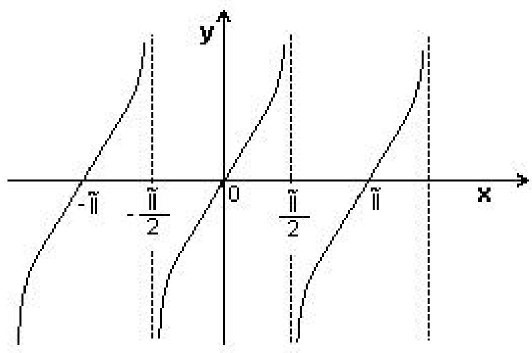


fig.2.15-Gráfico da função tangente

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

denominada função secante *e definida para os valores de x tais que* $cosx \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq \pm\frac{(2n+1)\pi}{2}, n \in \mathbb{N}$.

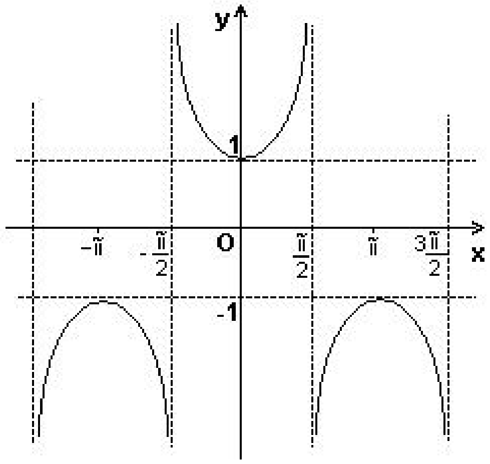


fig.2.16-Gráfico da função secante

$$\cos\sec x = \frac{1}{senx}$$

denominada função cossecante *e definida para valores de x tais que senx*$\neq 0 \iff x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, ...$

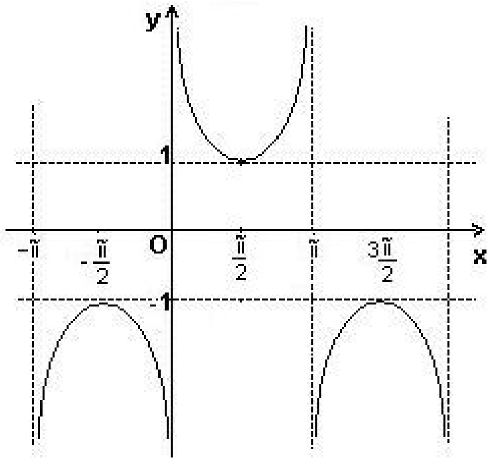


fig.2.17-Gráfico da função cossec x

$$\cot g\ x = \frac{\cos x}{senx}$$

denominada função cotangente *e definida para valores de x*$\neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, ...$

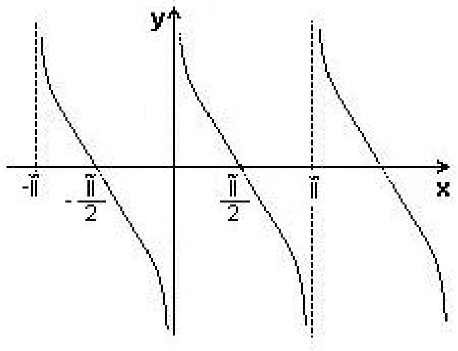


fig.2.18-Gráfico da função cotg x

Um resumo do significado geométrico das funções trigonométricas pode ser visto na Figura 2.19 onde a semi-reta que determina o ângulo está no primeiro quadrante ($0 < x < \pi/2$). Os sinais das funções dependem da posição do ponto P. Por exemplo, se P estivesse no segundo quadrante, isto é, se $\pi/2 < x < \pi$, o segmento $\overrightarrow{HC}$ teria direção contrária à do eixo-x e, portanto, teríamos $cotg\ x < 0$.

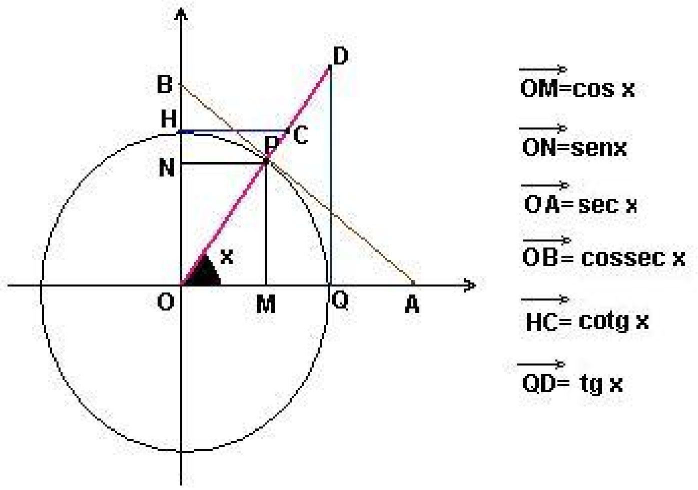


fig.2.19-Esquema geométrico das funções trigonométricas

Exercício: Faça um esquema geométrico para as funções trigonométricas nos demais quadrantes.

Proposição 7. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se*

$$sen^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$sen(x \pm y) = sen\ x \cos\ y \pm sen\ y \cos\ x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos\ x \cos\ y \mp sen\ x\ sen\ y$$

Prova: Fica como exercício.

Outras funções importantes que veremos neste curso são as funções **exponencial** e **logarítmo**. Faremos um estudo mais elaborado destas funções posteriormente.

2.3.5 Composição de Funções

Sejam $u = f(x)$ e $y = g(u)$ duas funções reais

$$f : A \longrightarrow B \text{ e } \quad g : B \longrightarrow C$$

$$x \longrightarrow u = f(x) \text{ e } \quad u \longrightarrow y = g(u)$$

. Se para cada x tivermos $u = f(x)$ no domínio de de g, então cada x determina um valor u que determina um valor y.

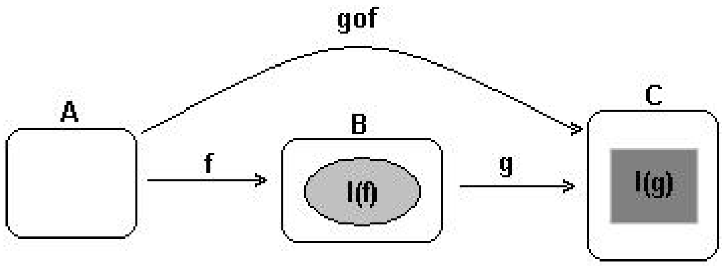


fig.2.20-Composição de funções

Escrevemos $y = g(f(x))$, ou simplesmente $y = gof$ que é denominada função composta de g e f.

Exemplos 1. Sejam $u = f(x) = \cos x$ e $y = g(u) = u^2$. Então, gof é dada pela equação $y = (\cos x)^2 = \cos^2 x$.

É importante observar que a ordem da composição é significante, isto é, de um modo geral temos $gof \neq fog$. De fato, se tivéssemos

$$\begin{cases} y = f(u) = \cos u \\ u = g(x) = x^2 \end{cases} \Longrightarrow y = fog = f(g(x)) = f(x^2) = \cos x^2.$$

2. Sejam $\begin{cases} y = f(x) = x^3 - 1 \\ y = g(x) = \sqrt{x+1} \end{cases}$ então,

gof é dada por $y = g(f(x)) = g(\ x^3 - 1) = \sqrt{(x^3 - 1) + 1}\ = \sqrt{x^3}$.

fog é dada por $y = f(g(x)) = f(\sqrt{x+1}) = \left(\sqrt{x+1}\right)^3 - 1$.

O domínio de gof é $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; x \geqslant 0\}$ e o domínio de fog é $\{x \in \mathbb{R}; x \geqslant -1\}$.

Podemos também definir a composta de uma função com si mesma:

$fof(x) = f^2(x) = f(f(x)) = f(x^3 - 1) = \left(x^3 - 1\right)^3 - 1$;

$gog(x) = g^2(x) = g(g(x)) = g(\sqrt{x+1}) = \sqrt{\sqrt{x+1} + 1}$

2.3.6 Funções inversas

Para definir funções inversas necessitamos de alguns conceitos preliminares:

Uma função f :$[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, é *monótona crescente* se

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

f é *monótona não-decrescente* em $[a,b]$ se

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2);$$

f é *monótona decrescente* em $[a,b]$ se

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2);$$

f é *monótona não-crescente* em $[a,b]$ se

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2);$$

f é *biunívoca* em $[a,b]$ se

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

para todo x_1 e x_2 do intervalo $[a,b]$.

Observamos que uma função crescente ou decrescente é necessariamente biunívoca (mostre!).

Seja $y = f(x)$ uma função biunívoca em $[a,b]$, dizemos que f^{-1} é a função *inversa* de f se $x = f^{-1}(y)$, isto é, se

$$fof^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = I_d(y) = y$$
$$f^{-1}of(x) = f^{-1}(f(x)) = I_d(x) = x$$

Observamos que o domínio de f^{-1} é a imagem de f e, reciprocamente, $I_m(f^{-1}) = dom(f)$. Ainda, nas condições impostas para a existência da função inversa, temos sempre

$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Exemplo 1) Seja $y = f(x) = 2x+1$. Temos que f é crescente pois se $x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_1 \Rightarrow 2x_1 + 1 < 2x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

A função inversa de f é $x = f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$. De fato,

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x+1) = \frac{(2x+1)-1}{2} = x$$

e

$$f(f^{-1}(y)) = f(\frac{y-1}{2}) = 2\frac{y-1}{2} - 1 = y$$

2) Seja $y = f(x) = x^2$. Neste caso, f é monótona crescente em $[0,+\infty)$´e monótona decrescente em $(-\infty,0]$. Então, se $x \in [0,+\infty)$, f tem inversa e $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$, com $y \geqslant 0$. No intervalo $(-\infty,0]$, a função inversa de $y = f(x)$ é dada por $f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ (verifique!).

Obs.: O gráfico de uma função inversa $x = f^{-1}(y)$ é *simétrico* ao da função $y = f(x)$, em relação à reta $y = x$.

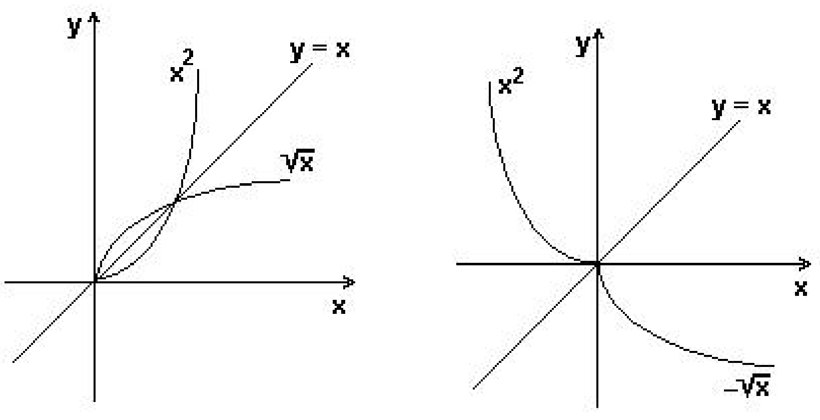


fig.2.21-Os gráficos das inversas são simétricos em reação à reta bissetriz

3) A função $y = senx$ é monótona crescente no intervalo $\frac{-\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ e sua inversa, neste intervalo, é $x = sen^{-1}y$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$. A função $sen^{-1}y$ significa *"ângulo cujo seno é y"* e geralmente, é denotada por $x = \arcsin y$ (arco cujo seno é y). Para constrir o gráfico desta função inversa basta desenhar uma função simétrica da função $y = senx$, em relação à reta $y = x$.

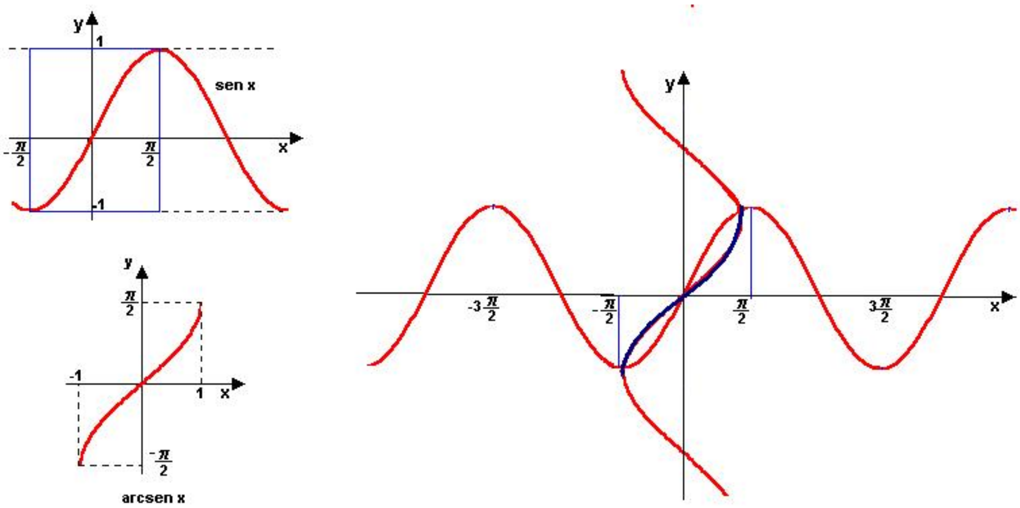


fig.2.22-Gráfico da função arcsenx

Lembramos que

$$y = arcsenx \Longleftrightarrow seny = x,$$

considerando-se as limitações para x e y .

Exemplos: a) $sen\frac{\pi}{2} = 1 \Longleftrightarrow \frac{\pi}{2} = arcsen1$
b) $sen\ \pi = 0 \Longleftrightarrow \pi = arcsen\ 0$

Exercícios 1- Determine as funções inversas das demais funções trigonométricas.

2- Seja f uma função *periódica* de período p, isto é, $f(x+p) = f(x)$ e, suponhamos que f admite uma inversa f^{-1} num intervalo maximal (p_1, p_2), isto é, $p_2 - p_1 = p$. Mostre que f^{-1}pode ser extendida a toda reta como uma função periódica de período dado por $\left|f^{-1}(p_2) - f^{-1}(p_1)\right|$ (Veja figura 2.22).

4) Se $y = a^x$ com $x \in \mathbb{R}$ e $a \neq 1$, então sua inversa é $x = \log_a y$

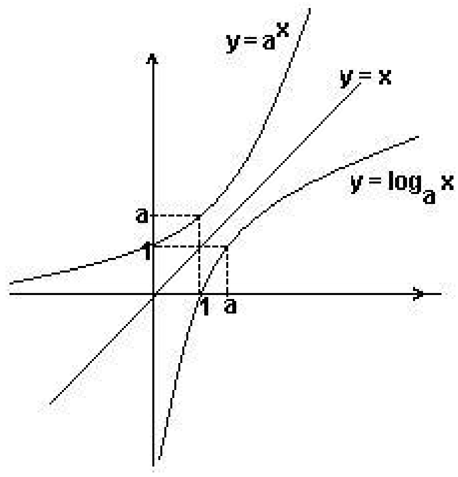


fig.2.23-Funções exponencial e logarítmo

$$y = a^x \Longleftrightarrow x = \log_a y$$

2.3.7 Operações com funções

Sejam f e g funções reais definidas no intervalo $[a, b]$. A função $h = f \pm g$ é definida em $[a, b]$ por

$$h(x) = f(x) \pm g(x), \text{ para todo } x \in [a, b]$$

A função $h = fg$ é definida por

$$h(x) = f(x)g(x), \text{ para todo } x \in [a, b]$$

Analogamente, definimos $h = f \div g = \frac{f}{g}$ por:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ para todo } x \in [a, b], \text{ com } g(x) \neq 0$$

Exemplo Sejam $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x + 1$. Então,

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= x^2 + x; \\ f(x) - g(x) &= x^2 - x - 2; \\ f(x)g(x) &= x^3 + x^2 - x - 1; \\ \frac{f(x)}{g(x)} &= x - 1 \end{aligned}$$

Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é *par* se, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos

$$f(x) = f(-x)$$

Assim, o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo-y.

Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é *ímpar* se, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos

$$f(x) = -f(-x)$$

Exemplos 1) A função $f(x) = \cos x$ é uma função periódica e par.

De fato, temos que $\cos(x + 2\pi) = \cos x \cos 2\pi - sen x\ sen 2\pi = \cos x$, ou seja, f é periódica com período 2π. Ainda,

$\cos(-x) = \cos(0 - x) = \cos 0 \cos x + sen 0 sen x = \cos x \Longrightarrow \cos x$ é par.

Analogamente, podemos mostrar que a função $f(x) = sen x$ é ímpar, periódica e de período 2π (mostre!).

Verifique que a função $h(x) = sen x \cos x$ é periódica e ímpar.

2) A função $f(x) = x^n$ é par se $n \in \mathbb{N}$ é par e, é ímpar se n é ímpar.

3) A função $f(x) = |x|$ é par.

Exercícios 1. Calcule os pontos de intersecção entre as curvas dadas pelas funções

$$f(x) = |x - 1| \ \text{ e } \ g(x) = x^2 - 1$$

2. Determine as equações das retas que passam pelo ponto $P : (1, -1)$. e sejam:

a) paralela à reta $y = 2x + 1$;

b) perpendicular à reta $y = 2x + 1$.

3. Calcule a equação da reta que passa pelos pontos das intersecções das parábolas

$$y = -(x - x^2) \ \text{ e } \ y = x^2 - 1$$

4. Determine a equação da curva cujos pontos distam do ponto $(2, 1)$ de 5.

5. Mostre que:

a) $sen 2x = 2 sen x \cos x$

b) $\cos 2x = \cos^2 x - sen^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2 sen^2 x$;

c) $tg^2 x = \sec^2 x - 1$;

d) $tg(x + y) = \frac{tg\, x + tg\, y}{1 - tg\, x tg\, y}$.

6. Mostre que todas as funções trigonométricas são periódicas e determine seus períodos.

7. Se $f(x)$ é ímpar e $g(x)$ é par, mostre que
a) $h(x) = f(x)g(x)$ é ímpar;
b) $h(x) = f(x)f(x)$ é par;
c) $h(x) = g(x)g(x)$ é par.

8. Verifique em que condições a função $f(x) = x^n + k$, n$\in \mathbb{N}$, é par

3 Limites e Continuidade

Açores

"Infinidades e indivisibilidades transcedem nossa compreensão finita, as primeiras devido à sua magnitude, as últimas devido a sua pequenez; imagine como são quando se combinam".

Galileu Galilei como Salviati em Diálogos sobre duas novas ciências[1].

[1]O leitor interessado pode consultar o importante texto de Eli Maor-e: A História de um Número(Edit. Record, 2003)

3.1 Introdução histórica [4]

"O conceito de limite constitui um dos fundamentos do Cálculo, uma vez que para definir derivada, continuidade, integral, convergência, divergência, utilizamos esse conceito. A sistematização lógica do Cálculo pressupõe então o conceito de limite.

Entretanto, o registro histórico é justamente o oposto. Por muitos séculos, a noção de limite foi confundida com idéias vagas, às vezes filosóficas relativas ao infinito - números infinitamente grandes ou infinitamente pequenos - e com intuições geométricas subjetivas, nem sempre rigorosas. O termo limite no sentido moderno é produto dos séculos XVIII e XIX, originário da Europa. A definição moderna tem menos de 150 anos.

A primeira vez em que a idéia de limite apareceu, foi por volta de 450 a.C., na discussão dos quatro paradoxos de Zeno. Por exemplo, no primeiro paradoxo - a *Dicotomia* - Zeno discute o movimento de um objeto que se move entre dois pontos fixos, A e B, situados a uma distância finita, considerando uma seqüência infinita de intervalos de tempo - $T_0, T_1, T_2 ...$ - cada um deles sendo o tempo gasto para percorrer a metade da distância percorrida no movimento anterior.

Analisando o problema, Zeno concluiu que dessa maneira o móvel nunca chegaria em B. Aristóteles, 384 - 322 a.C., refletiu sobre os paradoxos de Zeno com argumentos filosóficos. Para provas rigorosas das fórmulas de determinadas áreas e volumes, Arquimedes encontrou diversas somas que contêm um número infinito de termos. Na ausência do conceito de limite, Arquimedes utilizava argumentos denominados *reductio ad absurdum* (redução ao absurdo).

Determinar valores exatos para áreas em regiões limitadas por curvas é também um problema fundamental do Cálculo. Este é chamado freqüentemente problema da quadratura - determinação de uma área - e, relacionado com ele, o problema da cubatura, isto é, da determinação do volume de um sólido limitado por superfícies. Todos esses problemas conduzem às integrais.

Johannes Kepler, astrônomo famoso, era um dos mais envolvidos com problemas de cubatura. Bonaventura Cavalieri desenvolveu uma teoria elaborada nas quadraturas. Outros, tais como Evangelista Torricelli, Pierre de Fermat, John Wallis e St. Vincent de Gregory, planejaram técnicas de quadratura e/ou de cubatura que se aplicavam a regiões ou a sólidos específicos. Mas nenhum deles usou limites. Os resultados estavam quase todos corretos, mas cada um dependia de uma argumentação não algébrica, recorrendo à intuição geométrica ou filosófica, questionável em algum ponto crítico. A necessidade para os limites era justa, mas não reconhecida.

Isaac Newton, em Principia Mathematica, seu maior trabalho em Matemática e Ciência, foi o primeiro a reconhecer, em certo sentido, a necessidade do limite. No começo do livro I do Principia, tentou dar uma formulação precisa para o conceito do limite. Ele havia descoberto o papel preliminar que o limite teria no Cálculo, sendo essa a semente da definição moderna. Infelizmente, para a fundamentação rigorosa do Cálculo, durante muitas décadas, ninguém examinou as sugestões que Newton havia fornecido.

Durante o século XVIII, uma atenção muito pequena foi dada às fundamentações do Cálculo, muito menos ao limite e seus detalhes. Colin Maclaurin defendeu o tratamento dos fluxos de Newton, mas reverteu ao século XVII, com argumentos similares ao de Fermat que somente Arquimedes ocasionalmente tinha usado. Apesar de suas boas intenções, Maclaurin deixou passar a oportunidade de perceber a sugestão de Newton sobre limites.

D'Alembert era o único cientista da época que reconheceu explicitamente a centralidade do limite no Cálculo. Em sua famosa Encyclopédie, D'Alembert afirmou que a definição apropriada ao conceito de derivada requer a compreensão de limite primeiramente. Em termos gerais, D'Alembert percebeu, que a teoria dos limites era a "verdadeira metafísica do Cálculo".

Em 1784, a Academia de Ciências de Berlim ofereceu um prêmio para quem explicasse com sucesso uma teoria do infinito pequeno e do infinito grande na matemática e que pudesse ser usado no Cálculo como um fundamento lógico e consistente. Embora esse prêmio tenha sido ganho por Simon L'Huilier (1750 - 1840) pelo seu trabalho "longo e tedioso", este não foi considerado uma solução para os problemas propostos. Lazare N. M. Carnot (1753 - 1823) propôs uma tentativa popular de explicar o papel do limite no Cálculo como "a compensação dos erros", mas não explicou como estes erros se balançariam sempre perfeitamente.

Já no final do século XVIII, o matemático Joseph-Louis Lagrange - o maior do seu tempo - tinha elaborado uma reformulação sobre a mecânica em termos do Cálculo. Lagrange focalizou sua atenção nos problemas da fundamentação do Cálculo. Sua solução tinha como destaque "toda a consideração de quantidades infinitamente pequenas, dos limites ou dos fluxos". Lagrange fez um esforço para fazer o Cálculo puramente algébrico eliminando inteiramente os limites.

Durante todo o século XVIII, pouco interesse em relação aos assuntos sobre a convergência ou a divergência de seqüências infinitas e séries havia aparecido. Em 1812, Carl Friedrich Gauss compôs o primeiro tratamento rigoroso de convergência para seqüências e séries, embora não utilizasse a terminologia dos limites.

Em sua famosa teoria analítica do calor, Jean Baptiste Joseph Fourier tentou definir a convergência de uma série infinita sem usar limites, mas mostrando que, respeitadas certas hipóteses, toda função poderia ser escrita como uma soma de suas séries.

No começo do século XVIII, as idéias sobre limites eram certamente desconcertantes.

Já no século XIX, Augustin Louis Cauchy estava procurando uma exposição rigorosamente correta do Cálculo para apresentar a seus estudantes de engenharia na École Polytechnique de Paris. Cauchy começou seu curso com uma definição moderna de limite. Em suas notas de aula, que se tornaram papers clássicos, Cauchy usou o limite como a base para a introdução precisa do conceito de continuidade e de convergência, de derivada, de integral. Entretanto, a Cauchy tinham passado desapercebidos alguns dos detalhes técnicos. Niels Henrik Abel (1802 - 1829) e Peter Gustav Lejeune Dirichlet estavam entre aqueles que procuravam por problemas delicados e não intuitivos.

Entre 1840 e 1850, enquanto era professor da High School, Karl Weierstrass determinou que a primeira etapa para corrigir esses erros deveria começar pela definição de limite de Cauchy em termos aritméticos estritos, usando-se somente valores absolutos e desigualdades".

3.2 Sequências e Assíntotas

Seja $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no conjunto dos naturais. Tal função é denominada *sequência* e denotada por $f(n) = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

“Uma sequência é *convergente* para x^*, e escrevemos $x_n \longrightarrow x^*$, se x_n se aproxima de x^* quando n for muito grande” - Esta frase, do ponto de vista de um matemático, está longe da exatidão que ele busca quase sempre, pois palavras como “se aproxima” ou “muito grande” podem ser consideradas mais subjetivas que determinísticas. A definição formal do que se convencionou chamar *limite* de uma sequência é obtida fazendo-se a tradução de tais palavras:

Definição 6. *Uma sequência é* convergente *para x^* e escrevemos $x_n \longrightarrow x^*$ se, para cada número positivo $\in$ existe um número natural n_0 tal que, se $n > n_0$ então $|x_n - x^*| <\in$.*

Notação: $\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = x^*$ ou $x_n \longrightarrow x^*$. Dizemos que x^* é o *limite* de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemplos 1) Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{1+\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Vamos mostrar que $x_n \longrightarrow 1$.

De fato, para cada $\in > 0$ arbitrário, basta considerar o número natural $n_0 > \frac{1}{\in}$ e teremos $|x_n - 1| = \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right| = \frac{1}{n}$. Logo, se $n > n_0 \Longrightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \in$, o que completa a prova.

Em palavras, $1+\frac{1}{n}$ se aproxima do valor $x^* = 1$ quando n cresce.

2) Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{(-1)^n\frac{n}{n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{-\frac{1}{2},\frac{2}{3},-\frac{3}{4},\ldots,(-1)^n\frac{n}{n+1},\ldots\right\}$.

Vamos mostrar que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ não converge.

Suponhamos (por absurdo) que $(-1)^n\frac{n}{n+1}$ seja convergente, isto é, $(-1)^n\frac{n}{n+1} \longrightarrow x^*$. Então, se considerarmos $\in = \frac{1}{2}$, deve existir um número natural n_0 tal que se $n > n_0$ devemos ter $\left|(-1)^n\frac{n}{n+1} - x^*\right| < 1$ e também $\left|(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n+2} - x^*\right| < \frac{1}{2}$.

Por outro lado, temos

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n+2} - (-1)^n\frac{n}{n+1}\right| = \left|(-1)^n\right|\left|-\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}\right| = \left|\frac{2n^2+4n+1}{(n+2)(n+1)}\right| > \left|\frac{2n^2+4n+1}{n^2+3n+2}\right| > 1$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ pois

$$\left|\frac{2n^2+4n+1}{n^2+3n+2}\right| = \frac{2n^2+4n+1}{n^2+3n+2} > 1 \Longleftrightarrow 2n^2+4n+1 > n^2+3n+2 \Longleftrightarrow n^2+n > 1$$

o que é verdadeiro para todo $n \geq 1$.

Então, teremos

$$\begin{aligned} 1 &< \left|(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n+2} - (-1)^n\frac{n}{n+1}\right| = \left|(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n+2} - x^* + x^* - (-1)^n\frac{n}{n+1}\right| \\ &< \left|(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n+2} - x^*\right| + \left|(-1)^n\frac{n}{n+1} - x^*\right| < \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Estas duas desigualdades levam a uma contradição e, portanto, a sequência não converge.

Observe que a subsequência $\{x_n\}_{n\in\wp} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n\in\wp}$, onde $\wp$ é o conjunto dos números pares, converge para $x^* = 1$ e a subsequência dos ímpares $\left\{-\frac{n}{n+1}\right\}_{n\in£}$ converge para $x^* = -1$ (mostre!).

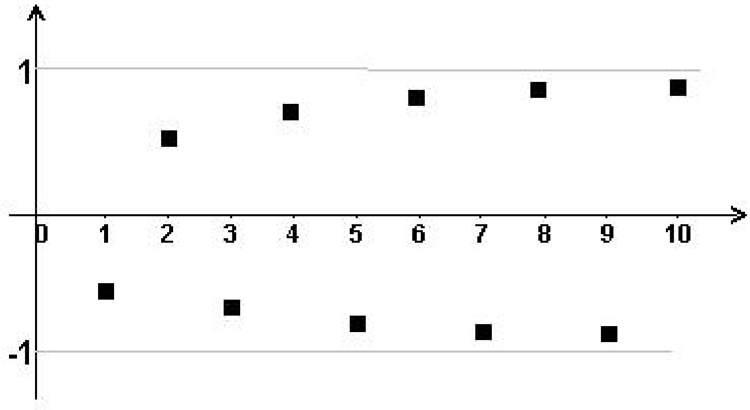


fig.3.1-A sequência $(-1)^n \frac{n}{n+1}$ é divergente

Para uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ podemos também definir o *limite no infinito* de modo análogo ao definido para sequências:

Definição 7. *Dizemos que L é o limite de $f(x)$, quando x tende a $+\infty$ se, dado um valor arbitrário $\in > 0$, podemos determinar um número real positivo M, tal que se $x > M$ então $|f(x) - L| <\in$.*

Notação: $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

Exemplos 1) Seja $f(x) = \frac{2x+1}{x}$, vamos mostrar que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

É necessário provar que para todo $\in > 0$, a seguinte desigualdade será verdadeira

$$\left|\frac{2x+1}{x} - 2\right| <\in$$

desde que se tenha $x > M$, onde M é determinado com a escolha de $\in$.

Temos que $\left|\frac{2x+1}{x} - 2\right| = \left|\frac{1}{x}\right|$ e portanto, $\left|\frac{2x+1}{x} - 2\right| <\in \Longleftrightarrow \left|\frac{1}{x}\right| <\in$ que é verdadeiro para todo $|x| > \frac{1}{\in} = M$. Então, dado um $\in > 0$ arbitrário, para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| > \frac{1}{\in} = M$, tem-se que $|f(x) - 2| <\in$.

Observação: Quando temos $\lim_{x\to+\infty} f(x) = k$, dizemos que a reta $y = k$, paralela ao eixo-x, é uma *assíntota horizontal* da função f ou que a função *f se estabiliza no ponto y=k*.

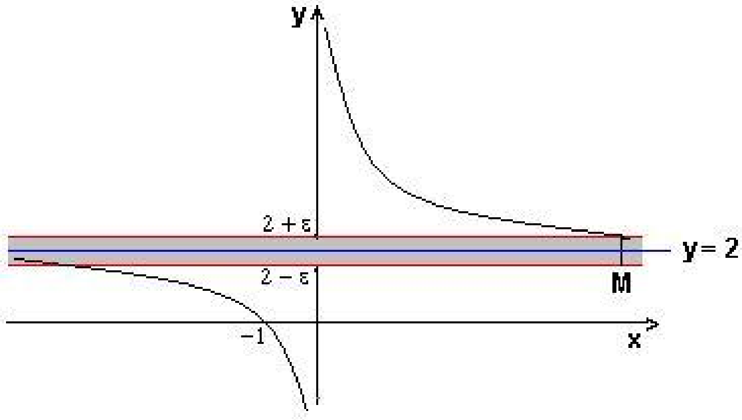


fig.3.2-A função $f(x) = \frac{2x+1}{x}$ é estável no ponto x=2

De modo análogo podemos definir uma *assíntota vertical* $x = k$, de $f(x)$ quando

$$\lim_{x \to k} f(x) = \infty$$

significando que quando x se aproxima do valor k, o valor da função $|f(x)|$ cresce sem limitação. Em outras palavras,

Dado um valor arbitrário $M > 0$, existe um valor $\delta > 0$ tal que se $|x - k| < \delta$ então $|f(x)| > M$

Exemplo Seja $f(x) = \frac{1}{x}$ e consideremos $k = 0$. Dizer que $x \to 0$, significa que x pode se aproximar de *zero* tanto quanto se queira e, quanto mais próximo $|x|$ estiver de *zero*, maior será o valor de $\left|\frac{1}{x}\right|$. Ainda, os valores de $\left|\frac{1}{x}\right|$ não são limitados. Por exemplo, seja $M = 10000$, então basta considerar $\delta = \frac{1}{10000}$ e teremos $|f(x)| = \left|\frac{1}{x}\right| > 10000 = M$ desde que $|x - 0| = |x| < \frac{1}{10000}$.

Logo,.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

Podemos observar que se x se aproxima de *zero* por valores positivos, então $\frac{1}{x}$ é também positivo e crescente. Se x se aproxima de *zero* por valores negativos, então $\frac{1}{x}$ é também negativo e decrescente. Este fato pode ser denotado por

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{(limite à direita)}$$
$$\text{e} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{(limite à esquerda)}$$

De qualquer maneira, $x = 0$ é uma *assíntota vertical* da função $f(x) = \frac{1}{x}$.

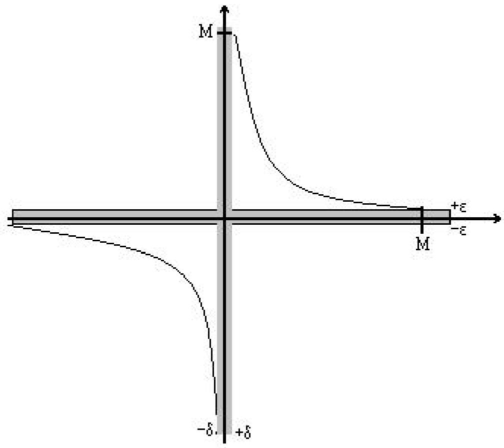


fig.3.3 - Assíntotas da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Propriedades dos limites infinitos

1. Se $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = k$, então
a) $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = +\infty$
b) $\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = \begin{cases} +\infty & \text{se } k > 0 \\ -\infty & \text{se } k < 0 \end{cases}$
Se $k = 0$, é necessário uma análise mais apurada.

2. Se $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = k$, então
a) $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = -\infty$
b) $\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = \begin{cases} -\infty & \text{se } k > 0 \\ +\infty & \text{se } k < 0 \end{cases}$

3. Seja $f(x)$ uma função racional, isto é, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, onde
$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n;$ com $a_0 \neq 0$
$Q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^{m-k} = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + ... + b_m;$ com $b_0 \neq 0$.
Então,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } n < m; \\ \frac{a_0}{b_0} & \text{se } n = m \\ +\infty & \text{se } [n > m \text{ e } a_0 b_0 > 0] \\ -\infty & \text{se } [n > m \text{ e } a_0 b_0 < 0] \end{cases}$$

4) $\lim_{x\to k} f(x) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to k} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

O comportamento de uma curva para pontos "distantes" da origem nos leva ao estudo das assíntotas cuja definição mais geral é dada por:

Definição 8. *Seja $y = f(x)$ uma curva do plano e P(x,y) um ponto arbitrário desta curva. Seja d a distância deste ponto P a uma reta r. Dizemos que esta reta r é uma assíntota à curva se d$\to 0$ quando P$\to \infty$. Em outras palavras, para todo $\in > 0$, existe M>0 tal que d<$\in$ se $\sqrt{x^2+y^2} > M$.*

Por esta definição, é claro que se $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ então a reta vertical $x = a$ é uma assíntota à curva $y = f(x)$.

Proposição 8. *A reta $y = ax + b$ é uma assíntota da curva $y = f(x)$ se, e somente se,* $\lim_{x\to\infty} [f(x) - ax - b] = 0$

Esta proposição segue imediatamente da definição.

Agora, se $y = ax + b$ é uma assíntota da curva $y = f(x)$, podemos determinar as constantes a e b da seguinte forma:

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - ax - b] = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right] = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right] = 0$$

$\Longleftrightarrow$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

Conhecendo o valor de a podemos determinar b tomando

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - ax]$$

Se um dos limites não existir então a curva não admite uma reta como assíntota. Também é claro que se $a = 0$, a reta assíntota será horizontal se $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$.

Exemplo 4. *Encontrar as assíntotas da curva $y = \frac{x^2+x}{x-1}$.*

Solução: (a) Temos que

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+x}{x-1} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+x}{x-1} = -\infty$$

Então, $x = 1$ é uma assíntota vertical.

(b) Para se ter assíntota inclinada ou horizontal é necessário (mas não suficiente) que $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x}{x-1} = \pm\infty$, que é este caso, uma vez que o grau do polinômio $P(x) = x^2 + x$ é maior que do polinômio $Q(x) = x - 1$.

Se tiver assíntota inclinada ou horizontal $y = ax + b$, seu coeficiente angular a será

$$a = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+x}{x-1}\right)\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x}{x^2-x} = 1$$

e a constante b é dada por:

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2+x}{x-1} - x\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$$

Assim, $y = x + 2$ é uma assíntota inclinada da curva $y = \frac{x^2+x}{x-1}$.

Para investigar a posição da curva em relação à assíntota toma-se a diferença

$$\delta = \left(\frac{x^2+x}{x-1}\right) - (x+2) = \frac{2}{x-1}$$

Temos, $\delta > 0 \Longleftrightarrow x > 1$.

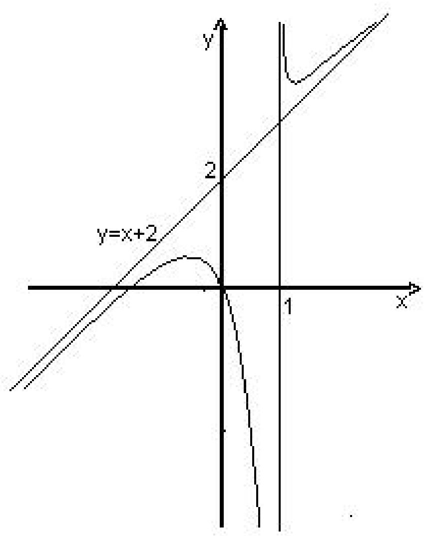


fig3.4-A curva e suas assíntotas

3.3 Limites

Definição 9. *Dada uma função real f e os números a e L, dizemos que L é o limite de $f(x)$ quando x tende ao valor a, se para cada número positivo $\in$ existe um número positivo δ tal que a distância de $f(x)$ a L é menor que $\in$ quando a distância entre x e a é menor que δ.Em outras palavras, a função se aproxima de L quando a variável independente x se aproxima de a.*

Notação: $\lim_{x\to a} f(x) = L$ ou, abreviadamente, $f(x) \longrightarrow L$ quando $x \longrightarrow a$.

A definição em si mesma deve ser interpretada como um teste, ou seja, quando dado um qualquer número positivo ("arbitrariamente pequeno") que chamamos de $\in$, o teste consiste em encontrar outro número positivo δ,de modo que $f(x)$ satisfaça $(L- \in) < f(x) < (L+ \in)$ se x estiver no intervalo $(a-\delta, a+\delta)$.

Uma maneira formal de escrever esta definição é

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall \in > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } |f(x) - L| < \in \text{ se } |x-a| < \delta$$

Geometricamente, a definição nos garante que se $\in > 0$ é dado, podemos encontrar um $\delta > 0$ de modo que o gráfico da função f esteja contido no retângulo limitado pelas retas $x = a - \delta$, $x = a + \delta$, $y = L- \in$ e $y = L+ \in$ (Veja Fig. 3.5)

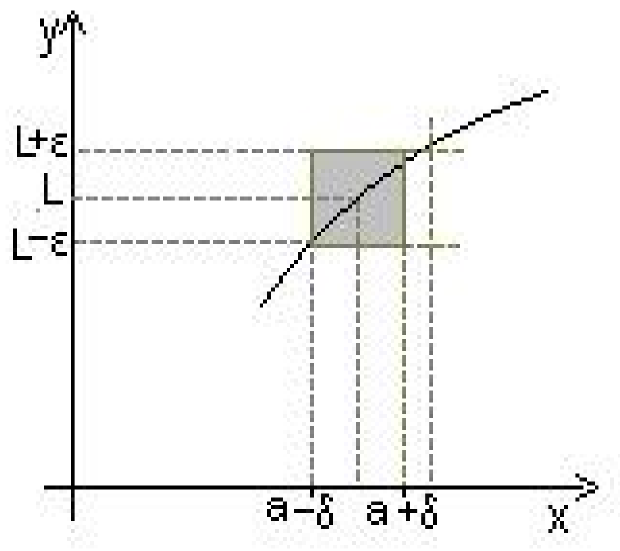


fig.3.5-Limite de uma função

Exemplo 5. *Seja* $f(x) = \frac{1}{x+1}$ *com* $x \neq -1$.

Vamos encontrar um valor $\delta > 0$, tal que $\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| < 0,01$ se $|x-1| < \delta$, ou seja, devemos determinar δ de modo que a curva $f(x) = \frac{1}{x+1}$ esteja contida no retângulo limitado pelas retas $x = 1-\delta$, $x = 1+\delta$, $y = \frac{1}{2} + 0,01 = 0,51$ e $y = \frac{1}{2} - 0,01 = 0,49$.

Quando as retas $y = 0,51$ e $y = 0,49$ interseptam a curva determinamos um intervalo I no eixo-x com a propriedade: se $x \in I$, então $f(x) \in (0,49; 0,51)$;

$$\frac{1}{x+1} = 0,51 \Longrightarrow x_1 = \frac{49}{51} \text{ e } \frac{1}{x+1} = 0,49 \Longrightarrow x_2 = \frac{51}{49} \Longrightarrow \begin{cases} (1-x_1) = \frac{2}{51} = \delta_1 \\ (x_2 - 1) = \frac{2}{49} = \delta_2 \end{cases}$$

Agora, se considerarmos $\delta = Min(\delta_1, \delta_2) = \frac{2}{51}$, teremos para todo $x \in (1-\delta, 1+\delta)$, que $\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| < 0,01$.

Devemos observar que, uma vez determinado um δ, então para qualquer valor **menor** que δ o resultado continua válido. Assim, se o gráfico da função está no retângulo $x = \frac{49}{51}; x = \frac{51}{49}; y = 0,51; y = 0,49$, certamente estará no retângulo menor $x = 0,97$; $x = 1,03$; $y = 0,51$; $y = 0,49$ e portanto, para $\in = 0,01$ podemos tomar $\delta = 0,03$.

Agora, usando simplesmente a definição vamos mostrar que $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$.

Solução: Temos $L = \frac{1}{2}$ e $a = 1$ e devemos mostrar que para todo $\in > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $\left|\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\right| < \in$ quando $0 < |x-1| < \delta$;

Assim, dado $\in$ vamos resolver as equações

$$\begin{cases} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} - \in \\ \\ \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} + \in \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (\frac{1}{2} - \in)(x+1) \Rightarrow x = \frac{\frac{1}{2}-\in}{\frac{1}{2}+\in} = x_1 \\ \\ x = (\frac{1}{2} + \in)(x+1) \Rightarrow x = \frac{\frac{1}{2}+\in}{\frac{1}{2}-\in} = x_2 \end{cases}$$

Então, tomamos o valor δ como sendo a menor das distâncias entre 1 e x_1 ou 1 e x_2 (no caso, $1 - x_1 < x_2 - 1$). Tomamos

$$\delta = 1 - x_1 = 1 - \frac{\frac{1}{2} - \in}{\frac{1}{2} + \in} = \frac{2\in}{\frac{1}{2} + \in} = \frac{4\in}{1 + 2\in}$$

De uma maneira geral, usando apenas a definição, é complicado saber o valor do limite de uma função $f(x)$ quando x tende a a. Apresentaremos agora alguns teoremas que facilitam este tipo de problema. As demonstrações, entretanto, nem sempre são feitas.

Teorema 1. *(**Unicidade do limite**) Suponhamos que $lim_{x\to a}f(x) = L_1$ e $lim_{x\to a}f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.*

Demonstração: Vamos supor que $L_1 \neq L_2$ e mostrar que isto é impossível.
Seja $\in = \frac{1}{2}|L_1 - L_2| > 0$ pois estamos supondo que $L_1 \neq L_2$.
desde que $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$, sabemos, por definição, que existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - L_1| < \in \tag{3.3.1}$$

Analogamente, de $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta_2 \Longrightarrow |f(x) - L_2| < \in \tag{3.3.2}$$

Tomando $\delta = Min\{\delta_1, \delta_1\}$,teremos as duas desigulddades válidas, isto é,

$$0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L_1| < \in \text{ e } |f(x) - L_2| < \in$$

Como $L_1 - L_2 = L_1 - f(x) + f(x) - L_2$, temos

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2|$$

Agora, $\in = \frac{1}{2}|L_1 - L_2| \leq \frac{1}{2}|L_1 - f(x)| + \frac{1}{2}|f(x) - L_2| \leq \frac{1}{2} \in + \frac{1}{2} \in = \in$, ou seja, $\in < \in$ o que é absurdo. portanto, a suposição $L_1 \neq L_2$ é falsa.

Teorema 2. *Seja f(x) uma função constante, isto é, f(x)=c para todos os valores x de seu domínio. Então, para qualquer número a$\in \mathbb{R}$, temos*

$$lim_{x\to a}f(x) = c$$

Este teorema é demonstrado, aplicando simplesmente a definição de limite à particular função constante (Verifique).

Teorema 3. *(**limite de uma soma ou diferença**) Se f e g são duas funções com*

$$lim_{x\to a}f(x) = L_1 \quad e \quad lim_{x\to a}g(x) = L_2$$

então,

$$lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = L_1 \pm L_2$$

A demonstração é bastante simples, seguindo a mesma linha da demonstração de *unicidade do limite* (Mostre!)

Observamos que este resultado pode ser extendido para um número finito de parcelas, isto é, se $\lim_{x\to a} f_j(x) = L_j$

$$\lim_{x\to a}\sum_{j=1}^{n} f_j(x) = \sum_{j=1}^{n}\lim_{x\to a} f_j(x) = \sum_{j=1}^{n} L_j$$

A demonstração pode ser feita por indução (Faça!)

Teorema 4. *(**limite de um produto**) Se f e g são duas funções com*

$$lim_{x\to a} f(x) = L_1 \;\; e \;\;\; lim_{x\to a} g(x) = L_2$$

então,

$$lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = L_1.L_2$$

De maneira análoga à consequência do teorema anterior, podemos afirmar também que *o limite do produto de qualquer número finito de funções é o produto dos limites de cada uma das função.*

Teorema 5. *(**limite de um quociente**) Se f e g são duas funções com*

$$lim_{x\to a} f(x) = L_1 \;\; e \;\;\; lim_{x\to a} g(x) = L_2 \quad com\ L_2 \neq 0$$

então,

$$lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{L_1}{L_2}$$

Exemplo 6. *Vamos mostrar que $lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = 6$.*

Se considerarmos $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2-9}{x-3}$, não podemos aplicar o teorema anterior uma vez que o limite do denominador é nulo, isto é, $\lim_{x\to 3} g(x) = \lim_{x\to 3}(x-3) = 0$.

Observe, no entanto, que $F(x) = \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3 = G(x)$, para todo $x \neq 3$, ou seja, $F(x) = G(x)$ exceto no ponto $x = 3$.Então, devemos ter $\lim_{x\to 3} F(x) = \lim_{x\to 3} G(x) = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6$.

Exemplo 7. *Seja x a distância de um carro, em movimento, em relação a um ponto fixo. Esta distância varia com o tempo t, isto é, $x = f(t)$. Para encontrar a* velocidade *num instante t_0 devemos considerar a distância percorrida quando o tempo varia de t a t_0, isto é, $d = f(t) - f(t_0)$.*

A fórmula $v_m = \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ nos dá a *velocidade média* no intervalo de tempo $[t, t_0]$. A *velocidade instantânea* (no instante t_0) é dada por

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

A proposição anterior pode ser generalizada:

Proposição 9. *Sejam f e g duas funções com $f(x) = g(x)$ num intervalo (a,b), exceto no ponto $x = c \in (a,b)$. Se $lim_{x \to c} g(x) = L$ então $lim_{x \to c} f(x) = L$.*

Exercícios 1. Mostre, usando a definição que $\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x} = 2$.

2. Se $f(x) = x^2$, encontre um valor para $\delta > 0$ de modo que, se $0 < |x-2| < \delta$ então $\left|x^2 - 4\right| < 0,01$.

3. Demonstre os teoremas apenas enunciados.

4. Calcule $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-1}{x^3}$, indicando passo-a-passo o teorema aplicado.

5. Mostre que $lim_{x\to 0} sen x = 0$.

6. Seja a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < 0 \\ 1 - x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Mostre que $lim_{x\to 1} f(x) = 0$.

7. Calcule os seguintes limites

$$a)\ \lim_{x\to 1} \frac{x+3}{2x^2+6x-1}$$
$$b)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$$
$$c)\ \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h},\ x \text{ positivo}$$
$$d)\ \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$$

3.4 Continuidade

O Conceito de limite permite definir precisamente o que se entende por continuidade de uma função.

Observamos que podemos ter

$$lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

mesmo que f nem esteja definida no ponto $x_{0.}$ Por exemplo, seja

$$f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}, \text{ definida por } f(x) = \frac{1-x^2}{x-1}$$

Neste caso, f não está definida no ponto $x_0 = 1$ mas $lim_{x \to x_0} f(x) = -2$.

Definição 10. *Uma função $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, é contínua no ponto $x_0 \in A$ se* $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *existe e é igual a f(x_0), ou seja,*

$$lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Assim, uma condição necessária para que f seja contínua num ponto x é que f esteja definida neste ponto.

Exemplo 8. *(a) A função $f(x) = \frac{1-x^2}{x-1}$ não é contínua no ponto $x_0 = 1$;*

(b) a função $f(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ -2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ é contínua em em todo $\mathbb{R}$.

Definição 11. *Seja f definida no intervalo $a \leq x \leq b$, o* limite lateral à direita $lim_{x \to x_0^+} f(x)$ *é definido por*

$$lim_{\substack{x > x_0 \\ x \to x_0}} f(x)$$

ou seja, x tende a x_0 por valores superiores a x_0.

Analogamente, definimos o *limite lateral à esquerda* por

$$lim_{x \to x_0^-} f(x) = lim_{\substack{x < x_0 \\ x \to x_0}} f(x)$$

Observação: Se $a < x_0 < b$, então $lim_{x \to x_0} f(x) = L \Longleftrightarrow lim_{\substack{x > x_0 \\ x \to x_0}} f(x) = lim_{\substack{x < x_0 \\ x \to x_0}} f(x) = L$. este resultado decorre da unicidade do limite.

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, dizemos que f é contínua no ponto $x = a$ se

$$lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

f é contínua em $x = b$ se

$$lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

f é contínua no intervalo $[a,b]$ se for contínua em todos os pontos deste intervalo.

Quando uma função não é contínua em x_0 dizemos que é *descontínua no ponto* x_0.

Exemplo 9. *Seja a função* $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^2} & se\ \ x \neq 1 \\ 1 & se\ \ x = 1 \end{cases}$

Temos que $f(x)$ cresce de modo a superar qualquer número real positivo quando x tende a 1. Portanto,

$$\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1) = 1$$

Logo, f é descontínua no ponto $x = 1$.

Exemplo 10. *Seja a função* $f(x) = \begin{cases} x+1 & se\ -2 \leq x < 0 \\ x^2 & se\ \ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

Para analisar o comportamento da função na vizinhança do ponto $x = 0$, consideramos os limites laterais:
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x+1) = 1$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x^2) = 0.$

Logo, não existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ e portanto, f é descontínua no ponto $x = 0$.

Exemplo 11. *Seja a função* $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & se\ x \neq 3 \\ 6 & se\ \ x = 3 \end{cases}$

Neste caso, $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6 = f(3)$. Assim, f é contínua em $x = 3$ e é equivalente à forma $g(x) = x+3$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A função, cujo gráfico é a Fig. 3.6, dá uma idéia geométrica dos pontos onde se tem descontinuidade:

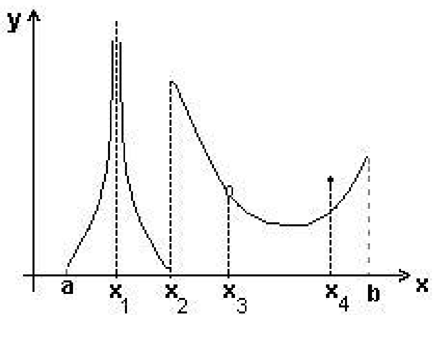


fig.3.6- A função f(x) é descontínua nos pontos x_1, x_2, x_3 e x_4

Observamos na figura 3.6 que as descontinuidades de f decorrem de condições diferentes:

(a) $\lim_{x\to x_1} f(x) = +\infty$ e f nem está definida no ponto x_1;
(b) $\lim_{x\to x_2} f(x)$ não existe pois os limites laterais são diferentes;
(c) $\lim_{x\to x_3} f(x) = L_1$ mas a função não está definida no ponto x_3;
(d) $\lim_{x\to x_4} f(x) = L_2 \neq f(x_4)$.

Exemplo 12. *A função*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se \;\; x \in \mathbb{Q} \\ 0 & se \;\; x \in I \end{cases}$$

é descontínua em todos os pontos da reta $\mathbb{R}$. *(verifique)*

Exemplo 13. *A função*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & se \;\; x \in \mathbb{Q} \\ 2x-1 & se \;\; x \in I \end{cases}$$

está definida em toda reta $\mathbb{R}$ *mas é contínua somente no ponto* $x = 1\,(verifique)$.

Os seguintes teoremas permitem verificar diretamente a continuidade das funcões por meio de suas propriedades;

Teorema 6. *Sejam f(x) e g(x) funções definidas no intervalo* $[a,b]$. *Se f e g são contínuas no ponto* $x_0 \in [a,b]$, *então*

(a) $h(x) = f(x) \pm g(x)$ *é contínua em* x_0 ;
(b) $h(x) = f(x)g(x)$ *é contínua em* x_0;
(c) $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ *é contínua em* x_0 se $g(x_0) \neq 0$.

Prova: É uma consequência imediata dos teoremas anteriores - De fato, f e g contínuas em x_0 implicam que

$$lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \;\text{ e }\; lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$$

Então,

$$lim_{x\to x_0} h(x) = lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = lim_{x\to x_0} f(x) \pm lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0) \pm g(x_0)$$

$$lim_{x\to x_0} h(x) = lim_{x\to x_0} [f(x)g(x)] = lim_{x\to x_0} f(x).lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0).g(x_0) = h(x_0)$$

$$lim_{x\to x_0} h(x) = lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{lim_{x\to x_0} f(x)}{lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \text{ se } g(x_0) \neq 0.$$

Se o ponto x_0 for uma das extremidades do intervalo $[a,b]$ a prova é feita, usando-se limites laterais.

Teorema 7. *Se f(x) é um polinômio, então f é contínua para todo x$\in \mathbb{R}$*

Prova: (Exercício) -

Sugestões: a) Mostre que se $f(x) = k$ (k constante), então f é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$;

b) Mostre que $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$, é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ (use indução completa);

c) Use o teorema anterior (partes a e b).

Teorema 8. *Se f(x) é uma função racional, então f é contínua em todo intervalo no qual o denominador não tem raíz.*

Prova: (Exercício) -

Sugestão: Use os teoremas 1.7 e 2.4

Teorema 9. *Sejam f(x) uma função definida no intervalo $[a,b]$, com possível excessão no ponto $x_0 \in [a,b]$, e g(x) uma função definida na imagem $[c,d]$ da função f. Se g é contínua em $y_0 \in [c,d]$ e se $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$, então*

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$$

ou equivalentemente,

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]$$

Ainda, se f é contínua em x_0,então $F = f \circ g$ é contínua em x_0.

Prova: g contínua em $y_0 \Longleftrightarrow$dado $\in > 0$, existe $\in^* > 0$ tal que $\left|g(y) - g(y_0)\right| < \in$ se $0 < \left|y - y_0\right| < \in^*$;

$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \Longleftrightarrow$dado $\in^* > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \in^*$ se $0 < |x - x_0| < \delta$, ou equivalentemente, $\left|y - y_0\right| < \in^*$ se $0 < |x - x_0| < \delta$.

Assim, para $\in > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\left|g(f(x)) - g(y_0)\right| < \in$ desde que $0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$.

Agora, se f é contínua em x_0 então $y_0 = f(x_0)$ e $\lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right] = g(f(x_0) = F(x_0)$.

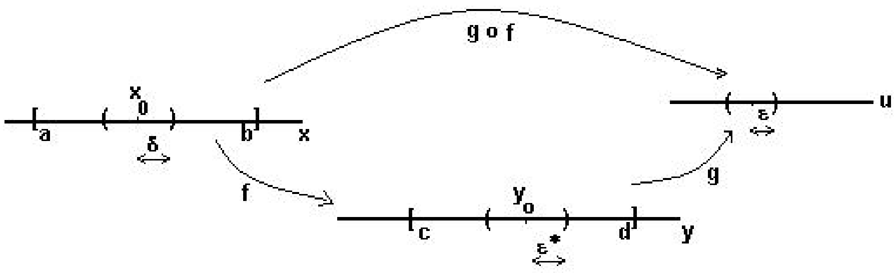


fig.3.7-Esquema da demonstração do teorema

3.4.1 Alguns resultados importantes

Teorema 10. *(**Valor intermediário**) Seja f(x) uma função definida e contínua no intervalo $[a,b]$ e sejam x_1, $x_2 \in [a,b]$. Se $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$ com $y_1 \neq y_2$, então para todo $y \in [y_1, y_2]$ existe um número $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = y$.*

Exercício 1. *Mostre, com um exemplo, que se a função for descontínua em um ponto de $[a,b]$ então o teorema não vale.*

Teorema 11. *(**Weierstrass**) Seja f(x) uma função definida e contínua no intervalo $[a,b]$. Então existem dois números m e M tais que $f(x_1) = m$ e $f(x_2) = M$ para $x_1, x_2 \in [a,b]$ e tal que $m \leq f(x) \leq M$, para todo $x \in [a,b]$.*
m = mínimo absoluto de f(x) em [a,b];
M = máximo absoluto de f(x) em [a,b].

Este teorema garante pois que se uma função for contínua num intervalo fechado, ela assume um mínimo absoluto e um máximo absoluto neste intervalo.

Exercício 2. *(a) Mostre que o teorema de Weierstrass é falso se o domínio da f for um intervalo aberto.*
(b) Mostre que o teorema também não vale se existe um ponto no intervalo [a,b] onde a função é descontínua.

Observamos que este resultado é muito útil para resolver problemas de otimização (Cap. IV).

A definição de continuidade de uma função em um ponto pode também ser colocada com a seguinte formulação:

$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0) \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{3.4.1}$$

Proposição 10. *A função f(x)=sen x é contínua para todo x∈ $\mathbb{R}$*

Prova: $\lim_{h\to 0} sen(x_0+h) = \lim_{h\to 0}[sen\ \mathrm{x}_0 \cosh + \cos x_0 sen\ h] = sen\ \mathrm{x}_0 [\lim_{h\to 0}\cosh] + \cos x_0 [\lim_{h\to 0} senh] = sen\ \mathrm{x}_0$.

Usamos o fato que

$$\lim_{h\to 0} sen\ h = 0 \text{ (Exercício 5 de limites) } \Longrightarrow \lim_{h\to 0}\cos h = 1 \text{ , pois } \cosh = \sqrt{1 - sen^2 h}$$

Como consequência do Teor. 8 e da Proposição temos que a função $f(x) = \cos x$ também é contínua em todo $\mathbb{R}$.

Definição 12. *Seja f(x) definida em [a,b]. Se f é descontínua em $x_0 \in [a,b]$ dizemos que a descontinuidade é removível se existir (finito) o $lim_{x\to x_0} f(x)$. Neste caso, podemos definir uma função contínua g(x) por:*

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & se \quad x \neq x_0 \\ lim_{x\to x_0} f(x) & se\ x = x_0 \end{cases}$$

Exercício 3. *1. Mostre que se $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ são funções contínuas em $x = x_0$, então as funções $h(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x)$ e $g(x) = \prod_{j=1}^{n} f_j(x)$ são também contínuas em x_0. (Sugestão: use indução).*

2. Verifique se a função f(x)=$\frac{x^2-3x+2}{x-2}$ tem descontinuidade removível no ponto $x = 2$.

3. Se $f(x) = tg\ x$, determine os intervalos da reta $\mathbb{R}$ onde f é contínua.

4. Mostre que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = L$$

5. Determine os limites

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4 + 3x^2 - x + 1}{x^7 - 1}$$

$$\lim_{x\to \pi}\ sen\sqrt{x}\cos^3 x$$

$$\lim_{x\to \pi}\ tg(sen\ \frac{x}{2})$$

"Skate"
Foto- http//metropolionline.com.br

"O método de Liebnitz pouco difere do meu, exceto na forma das palavras e dos símbolos"- Newton[1]

A modelagem matemática com toda sua abrangência e poder de síntese, fornecido, em grande parte, pelas notações de Liebnitz de derivadas, é por excelência o método científico das ciências factuais.

[1]A discussão sobre quem tinha iniciado o Cálculo tornou-se bastante exaltada, não era apenas uma questão de notações. Newton recebeu apoio unânime na Grã-Bretanha enquanto, a Europa continental ficou ao lado de Liebnitz

Um dos objetivos práticos de se estudar matemática é poder formular modelos que traduzem, de alguma forma, processos ou fenômenos da realidade. A formulação de modelos consiste, a grosso modo, de um relacionamento entre as variáveis que atuam no fenômeno. Quando temos uma variável y dependendo quantitativamente de uma outra variável independente x, podemos, muitas vezes, construir o modelo matemático ou analisar esta dependência através das características variacionais destas variáveis, ou seja, o modelo é formulado através das *variações* destas grandezas.

4.1 Variações

4.1.1 Variações discretas

As variações discretas são bastante usadas em dinâmica populacional. Seja P o número de indivíduos numa população. Considerando que P *varia* com o tempo t, podemos induzir que P seja uma função de t, isto é, $P = P(t)$.

sejam t_1 e t_2 dois instantes com $t_1 < t_2$. então, a diferença

$$\Delta P = P_2 - P_1 = P(t_2) - P(t_1)$$

é a *variação total* (ou simplesmente variação) do tamanho da população no intervalo de tempo de t_1 a t_2.

Observamos que se $\Delta P > 0$ então a população aumenta em quantidade neste intervalo e se $\Delta P < 0$, a população decresce. Ainda, se $\Delta P = 0$, a população permanece inalterada, em tamanho,neste intervalo de tempo.

Para analisarmos com que rapidez o tamanho da população varia, devemos levar em consideração o tempo transcorrido entre as medidas de $P(t_1)$ e $P(t_2)$.

Seja $\Delta t = t_2 - t_1$ (tempo transcorrido de t_1 a t_2).

A proporção

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P(t_2) - P(t_1)}{t_2 - t_1}$$

mostra quanto a população varia por unidade de tempo. Este valor é denominado *variação média* por unidade de tempo ou taxa média de variação (ou simplesmente *taxa de variação*).

Por exemplo, a variação média da população brasileira entre t_1 =1980 e t_2 =1991 foi de $2,529$milhões por ano. Enquanto que de 1991 a t_3 =2010 foi de

$$\frac{P(t_3)-P(t_2)}{2010-1991}=\frac{190,7-146,8}{19}=2{,}31$$

Outro tipo de medida de variação utilizada é a *variação relativa* ou *taxa de crescimento específico.* Esta taxa fornece uma medida de variação relativamente ao valor inicial considerado e sua expressão analítica depende do modelo populacional utilizado. Os casos mais usados para este tipo de taxa são:

a. *Taxa de variação média relativa* (linear) que é dada por:

$$\frac{\Delta P}{P_1\Delta t}=\frac{P(t_2)-P(t_1)}{P_1(t_2-t_1)}$$

Com os dados das populações anteriores, temos

$$\frac{2,529}{119,0}=0,02125 \text{ entre os anos 1980 e 1991}$$

$$\frac{2,31}{146,82}=0,01573 \text{ entre os anos 1991 e 2010.}$$

Observamos que a taxa de crescimento populacional brasileira está decrescendo, passando de $2,125\%$/ano (entre os anos 1980 e 1991) para $1,574\%$/ano (entre os anos 1991 e 2010).

b. *Taxa de variação malthusiana*, proveniente de um crescimento exponencial em cada unidade de tempo

$$\begin{aligned}
P_{t+1}-P_t &= \alpha P_t\\
P_{t+2}-P_{t+1} &= \alpha P_{t+1}\\
&---\\
P_{t+\Delta t}-P_{t+\Delta t-1} &= \alpha P_{t+\Delta t-1}\\
&--------(+)\\
P_{t+\Delta t}-P_t &= \alpha\left[P_t+P_{t+1}+...+P_{t+\Delta t-1}\right]
\end{aligned}$$

Logo,

$$P_{t+\Delta t}-P_t=\alpha P_t\left[1+(1+\alpha)+...+(1+\alpha)^{\Delta t-1}\right]$$

Assim,

$$\frac{P_{t+\Delta t} - P_t}{P_t} = \alpha \frac{(1+\alpha)^{\Delta t} - 1}{\alpha} \Longrightarrow \frac{P_{t+\Delta t}}{P_t} - 1 = (1+\alpha)^{\Delta t} - 1$$

Logo,

$$\alpha = \sqrt[\Delta t]{\frac{P_{t+\Delta t}}{P_t}} - 1$$

No caso, da população brasileira temos

$$\alpha_1 = \sqrt[11]{\frac{146,8}{119,0}} - 1 = 0,01928 \text{ entre os anos 1980 e 1991}$$

$$\alpha_2 = \sqrt[19]{\frac{190,7}{146,8}} - 1 = 0,01386 \text{ entre os anos 1991 e 2010.}$$

ou seja, a população brasileira cresceu (em média) 1,386% ao ano, durante 19 anos (de 1991 a 2010).

4.1.2 Variações Contínuas

As variações discretas, vistas anteriormente podem ser reformuladas em termos mais gerais:

Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e sejam x_1 e x_2 pontos do intervalo$[a,b]$, então definimos

(a) *Variação simples* (ou absoluta) de $y = f(x)$:

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

(b) *Variação média* de $y = f(x)$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

é a proporção entre as variações de y e de x. A variação média mostra o quanto variou y por unidade de x.

A expressão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ mede o coeficiente angular (ou inclinação) da reta que passa pelos pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, isto é,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\ \alpha$$

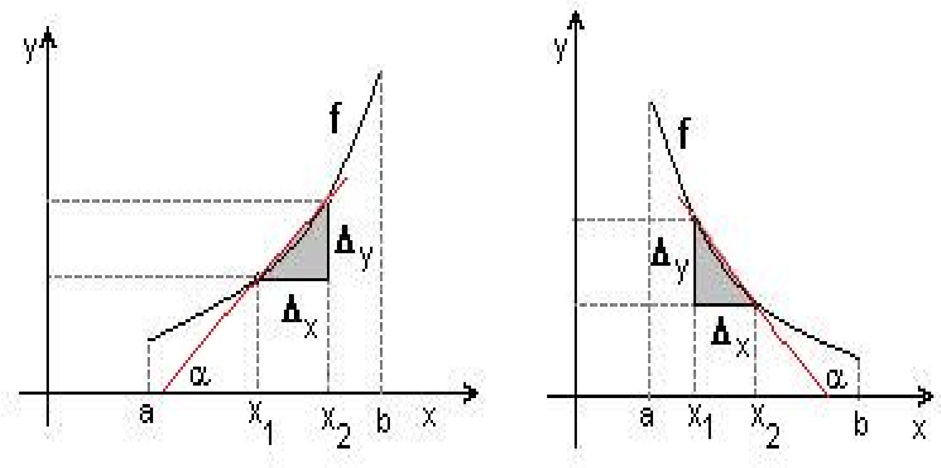


fig. 4.1-Variação média é o coeficiente angular da reta que une os pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$

(c) *Variação relativa* de $y = f(x)$:

$$\frac{1}{y_1}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{f(x_1)}\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

mostra a variação de y por unidade de x, relativa ao estágio inicial y_1.

(d) *Variação instantânea* de $y = f(x)$ num ponto x_0 é dada pelo valor do limite (quando tal limite existir):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Definição 13. *A derivada de uma função f, em um ponto x de seu domínio, é a variação instantânea de f neste ponto, isto é,*

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Observamos que se f está definida no intervalo fechado $[a, b]$, então definimos

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \quad e \quad f'(b) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(b + \Delta x) - f(b)}{\Delta x}$$

A derivada $f'(x_0)$ é o valor do coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto $(x_0, f(x_0))$.

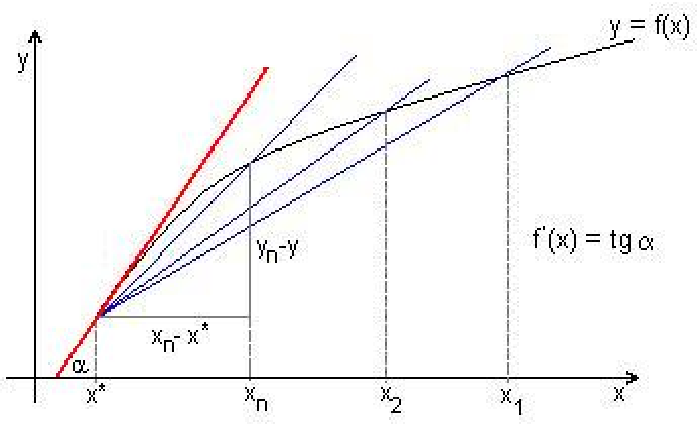


fig.4.2-(Interpretação geométrica da derivada) $f'(x)^*$

No caso desta definição podemos entender Δx_i como sendo uma sequência de valores $\Delta x_i = x_i - x^*$. Se $x_i \to x^*$, então $\Delta x_i \to 0$ e a sequência das variações médias $\left\{\frac{y_n - y}{x_n - x^*}\right\}$ converge para $f'(x^*)$.

Exemplo 14. *Seja $y = f(x) = x^2$, vamos determinar o valor de sua derivada em um ponto geral $x \in \mathbb{R}$.*

Temos que $f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$

$$\Delta y = f(x+h) - f(x) = 2xh + h^2 \Longrightarrow$$
$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x + h \text{ e } \lim_{h \to 0}(2x+h) = 2x$$

Portanto, $f'(x) = 2x$.

Exemplo 15. *Cálculo da derivada da função $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ no ponto $x = 2$.*

$\Delta y = f(x+h) - f(x) = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{-h}{x(x+h)}$;

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{-1}{x(x+h)} \Longrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2} = f'(x)$$

Portanto, $f'(2) = -\frac{1}{4}$.

De outra maneira,

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{2-x}{2x}}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \left(\frac{2-x}{x-2}\right)\frac{1}{2x} = -\frac{1}{4}$$

Exemplo 16. *Seja a função $f(x) = \sqrt{x}$ com $x \geqslant 0$.*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Observamos que a função não tem derivada no ponto $x = 0$. Neste caso particular, a reta tangente à curva no ponto $(0,0)$ é perpendicular ao eixo-x.

Exemplo 17. *seja f(x)=*$\begin{cases} x \;\; se \;\; x<0 \\ x^2 \;\; se \;\; x>0 \\ 0 \;\; se \;\; x=0 \end{cases}$. *Verificar se existe $f'(0)$.*

Solução: Usando a definição de derivada temos

$$f'(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x<0 \\ 2x \text{ se } x>0 \end{cases}$$

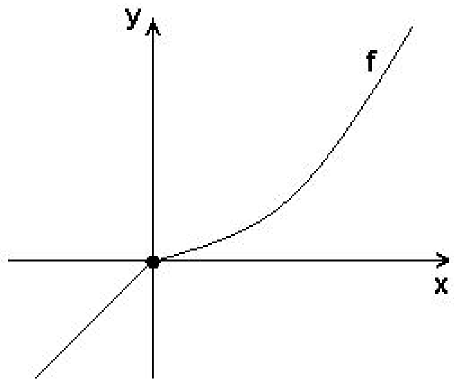
Para determinar $f'(0)$ devemos usar o conceito de derivada lateral, isto é,

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

Por outro lado

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x-0}{x-0} = 1$$

Assim, $f'(0^+) \neq f'(0^-)$ e portanto, não existe $f'(0)$.



$fig.4.3$ – A curva $f(x)$ tem uma “ponta” em 0

Observamos que *se uma função é descontínua em um ponto x_0 de seu domínio, então não existe a derivada $f'(x_0)$.*

Em resumo, os casos mais comuns para que uma função não seja derivável em um ponto x_0 são:

∘ f é descontínua em x_0;

∘ f tem uma “ponta” em x_0 (os limites laterais são distintos)

∘ $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$ (a reta tangente à curva no ponto é perpendicular à abscissa).

Exercício 5 - Dê um exemplo da não existência da derivada de uma função, para cada um dos casos anteriores.

Proposição 11. *Se uma função f tem derivada em um ponto x_0 , então f é contínua em x_0.*

Demonstração. Para $x \neq x_0$ podemos escrever

$$f(x) = f(x) - f(x_0) + f(x_0) = (x - x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0)$$

logo,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} f(x_0) =$$
$$= 0.f'(x_0) + f(x_0) = f(x_0)$$

Portanto, f é contínua no ponto onde é derivável. □

A recíproca pode não ser verdadeira, isto é, uma função contínua num ponto x pode não ter derivada neste ponto. Por exemplo, a função $f(x) = |x|$ não tem derivada no ponto $x = 0$ (verifique).

Interpretação geométrica da derivada

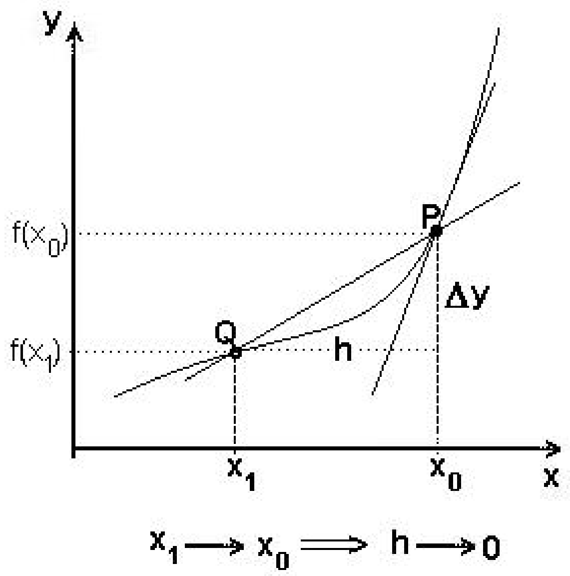
O conceito de *reta tangente* à curva num ponto, significando que a reta toca a curva em apenas um ponto não é preciso e nem correto. Nossa intenção é esclarecer a idéia de reta tangente à uma curva:

Consideremos $y = f(x)$ uma função e $P = (x_0, f(x_0))$ um ponto da curva f; Desejamos calcular o *coeficiente angular m da reta tangente* à curva f no ponto P. A dificuldade é que conhecemos somente o ponto P da reta e temos a necessidade de dois pontos para determinar m. Para resolver este problema, consideramos um outro ponto Q da curva, *próximo* de P. O coeficiente angular m_1 da reta secante que liga os pontos P e Q deve ser aproximadamente igual a m.

Se as coordenadas de Q são $(x_1, f(x_1))$, então

$$m_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad \text{ou} \quad m_1 = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

O ponto Q ser próximo de P significa que a distância $|h| = |x_1 - x_0|$ deve ser pequena



$fig.4.4-$ Interpretação geométrica da derivada

O coeficiente angular m da reta tangente à curva no ponto $P = (x_0, f(x_0))$ é o limite dos coeficientes angulares das retas secantes que unem pontos Q da curva ao ponto

P,

$$m = \lim_{h \to 0} m_1 = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Desta forma, podemos dizer que uma reta é tangente à curva $f(x)$ num ponto $P = (x_0, f(x_0))$ se seu coeficiente angular m for a derivada $f'(x_0)$, isto é,

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Exemplo 18. *Seja $f(x) = x^2 - 2x$ e o ponto $P = (2,0)$ - é fácil ver que P pertence à curva f.*
Consideremos o ponto $Q = (x_1, f(x_1)) = (2+h, f(2+h)) = (2+h, h^2 + 2h)$ com $h \neq 0$.

$$m_1 = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = h + 2$$

Quando o ponto Q se aproxima de P, o valor de h se aproxima de zero e, portanto, o coeficiente angular da reta que liga P a Q se aproxima de $m = 2$, que será o coeficiente angular da reta tangente à curva $y = x^2 - 2x$ no ponto $P = (2,0)$ ou inclinação da curva no ponto P.

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} (h+2) = 2$$

A equação da reta tangente é dada por

$$y = 2(x-2) + 0 = 2x - 4$$

Exemplo 19. *Seja $f(x) = x^3$ e o ponto $P = (0,0)$.Neste caso, a reta tangente à curva no ponto P é dada por $y = 0$ (verifique).*

Observamos que, no exemplo acima, a reta tangente "corta"a curva (Fig. 4.5).

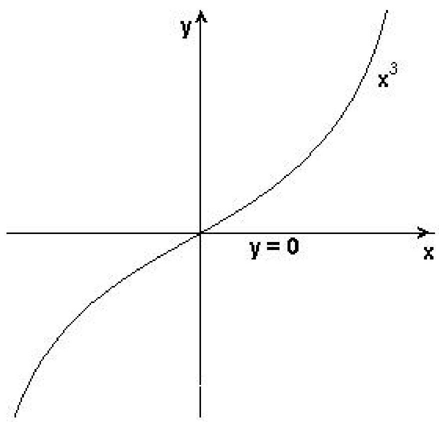


fig.4.5- O eixo-x é a reta tangente à curva x^3 no poto (0,0)

4.2 Teoremas de derivação

Observamos que a notação $f'(x)$ para derivada de uma função $y = f(x)$ foi introduzida por Lagrange.

Leibnitz denotou a mesma derivada com a notação **diferencial:**

$$\frac{df(x)}{dx} \text{ ou } \frac{df}{dx} \text{ ou } \frac{dy}{dx}$$

Teorema 12. *Sejam f e g duas funções que têm derivadas no ponto x_0 e seja $k(x) = k$ (constante). Então, em x_0, temos:*

1) $k'(x) = \frac{dk}{dx} = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

2) $(kf)'(x) = \frac{d(kf)}{dx} = k\frac{df}{dx} = kf'$;

3) $(f+g)'(x) = \frac{d(f+g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} = f'(x) + g'(x)$;

4) $(f-g)'(x) = \frac{d(f-g)}{dx} = \frac{df}{dx} - \frac{dg}{dx} = f'(x) - g'(x)$;

5) $(fg)'(x) = \frac{d(fg)}{dx} = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx} = g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$;

6) $\left[\frac{1}{g}\right]'(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{g} = -\frac{1}{g^2}\frac{dg}{dx} = -\frac{1}{g^2}g'(x)$;

7) $\left[\frac{f}{g}\right]'(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{g^2}\left[g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}\right] = \frac{gf'-fg'}{g^2}(x)$

Demonstração. (1) Como $k(x) = k$ (constante), então $k(x_0 + h) = k$ e portanto,

$$\lim_{h\to 0} \frac{k(x_0+h) - k(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = 0$$

(2) Se $y = kf(x)$ então, $\Delta y = kf(x_0+h) - kf(x_0) = k[f(x_0+h) - f(x_0)]$; Logo,

$$y' = (kf)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{k[f(x_0+h) - f(x_0)]}{h} = k\lim_{h\to 0} \frac{[f(x_0+h) - f(x_0)]}{h} = kf'(x_0)$$

(3) Seja $y = (f+g)(x)$, então $\Delta y = [f(x_0+h) + g(x_0+h)] - [f(x_0) + g(x_0)] = [f(x_0+h) - f(x_0)] + [g(x_0+h) - g(x_0)]$ $\square$

Assim,

$$\lim_{h\to 0}\frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]+[g(x_0+h)-g(x_0)]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{[g(x_0+h)-g(x_0)]}{h}=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Observamos que este mesmo processo pode ser usado para demonstrar que se

$$y=\sum_{j=1}^{n}f_j(x)\Longrightarrow y'=\sum_{j=1}^{n}f_j'(x)$$

(4) Se $y=(f-g)(x)$ então $y=(f+(-1)g)(x)$ e o resultado segue das regras demonstradas anteriormente;

(5) Seja $y=(fg)(x)$, então

$$\begin{aligned}\Delta y =&[f(x_0+h)g(x_0+h)]-[f(x_0)g(x_0)]\\ =&[[f(x_0+h)g(x_0+h)]-[f(x_0+h)g(x_0)]+[f(x_0+h)g(x_0)]-f(x_0)g(x_0)]\\ =&f(x_0+h)[g(x_0+h)-g(x_0)]+g(x_0)[f(x_0+h)-f(x_0)].\end{aligned}$$

Assim,

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h}=\lim_{h\to 0}f(x_0+h)\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}g(x_0)\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$=f(x_0)g'(x_0)+g(x_0)f'(x_0)=[fg'+gf'](x_0)$$

(6) Seja $y=\frac{1}{g}(x)$ com $g(x_0)\neq 0$. Então,

$$\Delta y=\frac{1}{g(x_0+h)}-\frac{1}{g(x_0)}=-\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{g(x_0+h)g(x_0)}$$

Logo,

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h}=\lim_{h\to 0}\left[-\frac{1}{g(x_0+h)g(x_0)}\right]\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=-\frac{1}{g^2(x_0)}g'(x_0)$$

(7) Use (5) e (6) e demonstre como exercício.

Teorema 13. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, se $f(x) = x^n$ então $f'(x) = nx^{n-1}$*

Demonstração. : Seja x_0 um número real, então

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x-x_0} = \\ &= \lim_{x\to x_0} \left[x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + x_0^2 x^{n-3} + \ldots + +x_0^{n-2} x^{n-(n-1)} + x_0^{n-1}\right] = \\ &= \lim_{x\to x_0} \sum_{j=0}^{n-1} x_0^j x^{n-1-j} \triangleq \sum_{j=0}^{n-1} x_0^j x_0^{n-1-j} = \sum_{j=0}^{n-1} x_0^{n-1} = n x_0^{n-1} \end{aligned}$$

Observamos que $\sum\limits_{j=0}^{n-1} x_0^j x^{n-1-j}$ é um polinômio em x de grau $n-1$, sendo portanto uma função contínua em x_0.

Proposição 12. *Se $f(x) = x^n$ então $f'(x) = nx^{n-1}$ para todo n inteiro ($n \in \mathbb{Z}$).*

□

Demonstração. Se $n > 0$ é o Teorema anterior. Se $n = 0$, então $f(x) = 1$ e portanto, $f'(x) = 0$. Assim, $f'(x) = nx^{n-1} = 0$ (n=0);

Se $n < 0$, consideramos $m = -n > 0$ e

$$\frac{dx^n}{dx} = \frac{dx^{-m}}{dx} = \frac{d(\frac{1}{x^m})}{dx} = -\frac{1}{x^{2m}} \frac{dx^m}{dx} = -\frac{1}{x^{2m}} m x^{m-1} = -m x^{-m-1} = n x^{n-1}$$

Teorema 14. *(Derivada da função polinomial) - Seja $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$ a função polinomial de grau $n > 0$, então sua derivada é o polinômio de grau $(n-1)$ dado por:*

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} (n-k) a_k x^{n-k-1}$$

□

Demonstração. (Exercício) □

Proposição 13. *Seja $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ uma função racional então $f'(x)$ também é uma função racional.*

Demonstração. Mostre, usando o fato que $f'(x) = \frac{Q(x)P'(x) - P(x)Q'(x)}{Q^2(x)}$ □

Exemplo 20. *Seja* $f(x) = \frac{x^3-2x+1}{x^7+1}$*, calcule* $f'(1)$.

Temos que

$$f'(x) = \frac{1}{(x^7+1)^2}\left[\left(x^7+1\right)\left(3x^2-2\right)-\left(x^3-2x+1\right)\left(7x^6\right)\right] =$$
$$= \frac{-7x^{18}+3x^{14}+12x^7-7x^6+3x^2-2}{(x^7+1)^2}$$

Logo, $f'(1) = \frac{-7+3+12-7+3-2}{4} = \frac{1}{2}$.

4.2.1 Regra da Cadeia - Aplicações

A regra da cadeia é uma das fórmulas mais importantes e usadas no Cálculo diferencial. Sua demonstração não é simples mas com alguns exemplos tudo pode ficar mais claro.

Proposição 14. *Seja* $y = f(x)$ *uma função derivável em* x_0*, então*

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \alpha(h)$$

onde, $\alpha(h) \to 0$ *quando* $h \to 0$.

Demonstração. Da definição de derivada temos

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Se definirmos $\alpha(h) = \begin{cases} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) & \text{para} \quad h \neq 0 \\ 0 & \text{para} \quad h = 0 \end{cases}$, segue-se que $\lim_{h\to 0}\alpha(h) = 0$ e, ainda, $\alpha(h)$ é contínua para $h = 0$. □

Observação - Se $y = f(x)$ e $\alpha = \alpha(h)$ são definidas como na proposição anterior então,

$$\Delta f(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0) = h[f'(x_0) + \alpha(h)]$$

Teorema 15. *(**Regra da Cadeia**) Sejam as funções* $u = f(x)$ *derivável no ponto* x_0 *e* $y = g(u)$ *derivável em* $u_0 = f(x_0)$*. Então, a função composta* $F = g \circ f$*, definida por* $F(x) = g(f(x))$ *é derivável no ponto* x_0 *e sua derivada é dada por:*

$$F'(x_0) = g'[f(x_0)]\,f'(x_0)\,.$$

Demonstração. Vamos determinar F' usando a definição de derivada:

$$\begin{aligned}F(x_0) &= g(f(x_0)) = g(u_0)\\ F(x_0+h) &= g(f(x_0+h)) = g(f(x_0)+f(x_0+h)-f(x_0)) = g(f(x_0)+\Delta f(x_0)) =\\ &= g(u_0+\Delta u_0)\end{aligned}$$

Logo,

$$\Delta F(x_0) = F(x_0+h) - F(x_0) = g(u_0+\Delta u_0) - g(u_0)$$

Da Proposição 4.1 segue que

$$\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta u_0} = g'(f(x_0)) + \alpha(\Delta u_0) \Longrightarrow \Delta F(x_0) = [g'(f(x_0)) + \alpha(\Delta u_0)]\,\Delta u_0$$

Logo,

$$\frac{\Delta F(x_0)}{h} = [g'(f(x_0)) + \alpha(\Delta u_0)]\,\frac{\Delta u_0}{h}$$

Desde que $\frac{\Delta u_0}{h} \to u'(x_0)$ quando $h \to 0$ e $\alpha(\Delta u_0) \to 0$ quando $\Delta u_0 \to 0$ (e portanto quando $h \to 0$), concluimos que

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}[g'(f(x_0)) + \alpha(\Delta u_0)]\,\frac{\Delta u_0}{h} = \lim_{h\to 0}[g'(f(x_0)) + \alpha(\Delta u_0)]\lim_{h\to 0}\frac{\Delta u_0}{h} =$$

$$= g'[f(x_0)]\,f'(x_0)$$

Usando a notação de Liebnitz podemos escrever

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

□

Exemplos 1. Seja $F(x) = (x^2-3x+1)^4$, determine a função derivada $F'(x)$.

Solução: Sejam $u = f(x) = x^2-3x+1$ e $y = g(u) = u^4$.

Segue-se que $F = g\circ f$, isto é, $F(x) = g(f(x)) = g(x^2-3x+1) = (x^2-3x+1)^4$.

Portanto,

$$F'(x) = \frac{dg}{du}\frac{du}{dx} = 4u^3\,[2x-3] = 4\Big[x^2-3x+1\Big]^3\,[2x-3]$$

2. Sejam $\begin{cases} y = f(x) = x^4 - 2x + 1 \\ x = g(t) = t^3 - 2t^2 + t \end{cases}$, use a regra de cadeia para determinar $\frac{dy}{dt}$.

Solução: Temos que

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 2 \text{ e } \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 4t + 1$$

logo, $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \left[4x^3 - 2\right]\left[3t^2 - 4t + 1\right] = \left[4\left(t^3 - 2t^2 + t\right)^3 - 2\right]\left[3t^2 - 4t + 1\right]$

Proposição 15. *Se* $F(x) = [f(x)]^n$, $n \in \mathbb{Z}$, *então*

$$F'(x) = n\,[f(x)]^{n-1}\,f'(x)$$

Demonstração. Mostre, usando a regra da cadeia. □

Exemplo: a) Seja $F(x) = (x^2-3x+1)^4 \Longrightarrow F'(x) = n\,[f(x)]^{n-1}\,f'(x) = 4\left[x^2 - 3x + 1\right]^3[2x-3]$, de acordo com o exercício 1. anterior.

4.2.2 Derivadas de funções inversas

Dadas duas funções $y = f(x)$ e $x = g(y)$, dizemos que elas são inversas se

$$g(f(x)) = x \text{ e } f(g(y)) = y.$$

Teorema 16. *Dada a função* $y = f(x)$, *suponhamos que exista sua inversa quando* $x \in (a,b)$. *Seja* $x = g(y) = f^{-1}(y)$ *a inversa de* f *em* (a,b). *Se* $f'(x_0) \neq 0$ *e* $y_0 = f(x_0)$, *então*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Demonstração. Seja $F(x) = g(f(x)) = x$. Usando a regra da cadeia, vem

$$F'(x_0) = g'(f(x_0))f(x_0) = 1 \Longrightarrow g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Usando a notação de Liebnitz

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

□

Exemplo 21. *1). Seja $y = f(x)$ uma função monótona decrescente e $x = g(y)$ a sua inversa. Se $f(0) = 3$ e $f'(0) = -\frac{1}{4}$, encontre $g'(3)$.*

Solução: Se f e g são funções inversas, temos:

$$F(x) = g(f(x)) = x \Longrightarrow F'(x) = g'(f(x))f'(x) = 1$$

Logo,

$$F'(0) = g'(f(0))f'(0) = 1$$

Então,

$$1 = g'(3)(-\frac{1}{4}) \Longrightarrow g'(3) = -4$$

2.a) A função $f(x) = x^3 - 9x$ é crescente para $x < -\sqrt{3}$; Se g é a função inversa de f neste intervalo, encontre $g'(0)$.

Solução: Temos que a derivada de f é dada por: $f'(x) = 3x^2 - 9$ e, por outro lado, temos:

$$f(0) = 0 \Longleftrightarrow x^3 - 9x = 0 \Longleftrightarrow x(x^2 - 9) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

Assim, para $x < -\sqrt{3}$, $f(x) = 0$ se $x = -3$. Então, $g'(0) = \frac{1}{f'(-3)} = \frac{1}{3(-3)^2-9} = \frac{1}{18}$

2.b) A função $f(x) = x^3 - 9x$ é decrescente para $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$; Se h é a função inversa de f neste intervalo, encontre $h'(0)$.

Solução: Para $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$, temos que $f(x) = 0$ se $x = 0$; Assim,

$$h'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{-9} = -\frac{1}{9}$$

2.c) A função $f(x) = x^3 - 9x$ é crescente para $x > \sqrt{3}$; Se z é a função inversa de f neste intervalo, encontre $z'(0)$.

Solução:

$$z'(0) = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{18}$$

Exemplo 22. *Faça gráficos da função f(x) anterior e de suas inversas em cada intervalo onde f é monótona.*

Derivada de uma função representada pela fórmula paramétrica

Seja $y = f(x)$ uma função representada pelas equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad \text{com } t_1 \leq t \leq t_2$$

Vamos supor que as funções φ e ψ sejam deriváveis e que a função $x = \varphi(t)$ tenha uma inversa $t = \beta(x)$ também derivável. Então, y como função de x pode ser considerada a função composta $y = \psi(\beta(x))$.

Usando a regra da cadeia para derivada de função composta, obtemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\psi}{dt}(\beta(x))\frac{d\beta}{dx} = \psi'(\beta(x))\beta'(x)$$

onde, $\beta'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$.

Assim,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Exemplo 23. *1) Sejam x e y relacionados pelas equações paramétricas:*

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = asent \end{cases} \quad com\ 0 \leq t \leq \pi.$$

Encontrar $\frac{dy}{dx}$: a) para qualquer valor de t no intervalo $[0, \pi]$; b) para $t = \frac{\pi}{2}$.

Solução: a) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -a\ sen\ t \\ \frac{dy}{dt} = a\cos t \end{cases} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{a\cos t}{-asent} = -\cot g\ t.$

b) $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = -\cot g\ \frac{\pi}{2} = 0.$

2) O astroide é uma curva representada pelas equações paramétricas: $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\ sen^3 t \end{cases}$ *com* $0 \leq t \leq 2\pi$

Em cada quadrante estas equações definem y como função de x (verifique). Determinar a equação da reta tangente ao astroide no ponto em que $t = \frac{\pi}{4}$.

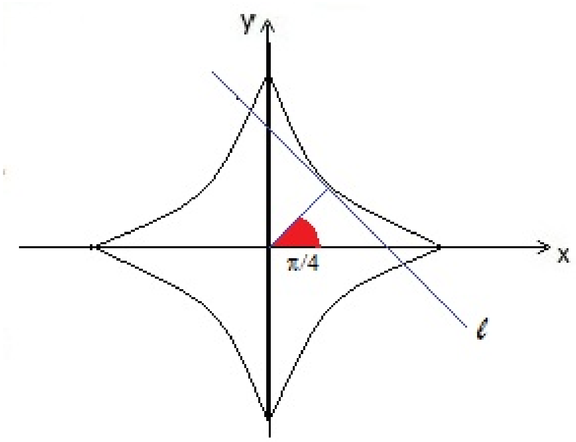


fig.4.6-Astroide e a tangente no ponto $\pi/4$

Solução: $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ com $0 \leq t \leq \pi/2$ representa o astroide no primeiro quadrante. Ainda, $y = f(x)$ é derivável em $0 < t < \pi/2$ e $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$.

Então,$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t\sin t \\ \frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t\cos t \end{cases}$ em $0 < t < \pi/2$.

Logo, $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\cot g\ t$.

Assim,

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\cot g\ \pi/4 = -1$: coeficiente angular da reta tangente no ponto em que $t = \pi/4$, ou seja, no ponto $P = \left(a\frac{\sqrt{2}}{4}, a\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

A equação da reta tangente no ponto P será

$$y - a\frac{\sqrt{2}}{4} = -1\left(x - a\frac{\sqrt{2}}{4}\right),$$

ou seja,

$$y = -x + a\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ObservaçãoNo ponto $t = \pi/4$, temos que $sen\ \pi/4 = \cos\pi/4$ e como $sen^2\ \pi/4 + \cos^2\pi/4 = 1 \Longrightarrow 2\cos^2\pi/4 = 1 \Longrightarrow \cos\pi/4 = \frac{\sqrt{2}}{2} = sen\ \pi/4$. Logo,

$$\begin{cases} x|_{t=\frac{\pi}{4}} = a\cos^3\ \frac{\pi}{4} = a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = a\frac{\sqrt{2}}{4} \\ y\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = a\sin^3\frac{\pi}{4} = a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = a\frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Relações implícitas e suas derivadas

Uma curva no plano pode ser dada por uma equação em que não temos y dado explicitamente como função de x. Por exemplo, a circunferência de centro em (x_0, y_0) e raio r é representada pela equação $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ e, neste caso, não temos $y=f(x)$ pois para um mesmo valor de x temos 2 valores de y. Entretanto, podemos dividir a circunferência em duas partes de modo que em cada uma delas tem-se y como função de x. De fato,

$$\begin{cases} y = y_0 + \sqrt{r^2-(x-x_0)^2} \\ y = y_0 - \sqrt{r^2-(x-x_0)^2} \end{cases}$$

definem as partes superiores e inferiores da circunferência com $x_0 - r < x < x_0 + r$.

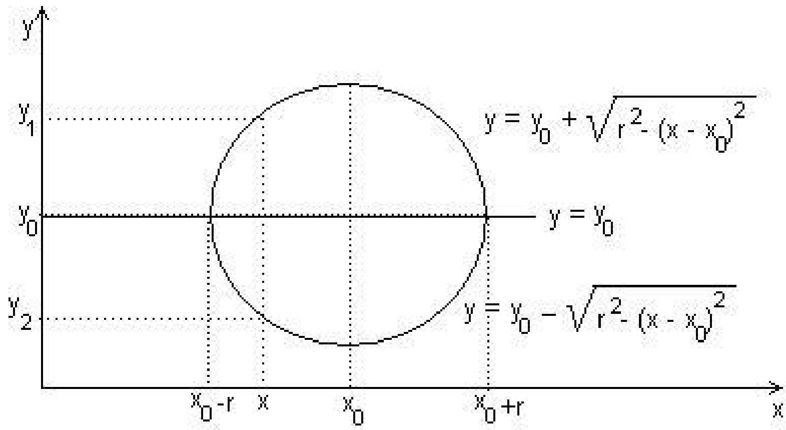


fig.4.7-Funções implícitas na equação de uma circunferência

Em certos casos de relações implícitas podemos explicitar y em termos de x, porém isto nem sempre ocorre. Por exemplo, a solução de um sistema presa-predador de Lotka-Volterra é a equação $-\alpha \ln x + \beta x = a \ln y + by + K$, onde não se consegue explicitar $y = f(x)$. De qualquer modo, sempre se pode determinar $\frac{dy}{dx}$ pelo método da *derivação implícita.*

Consideremos a equação da circunferência $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ e $P=(x^*,y^*)$ um ponto sobre a curva, com $x_0 - r < x^* < x_0 + r$. Podemos obter o valor de $\left.\frac{dy}{dx}\right|_P$ considerando a derivada de todos os termos da equação, isto é,

$$2(x-x_0)\frac{d(x-x_0)}{dx} + 2(y-y_0)\frac{d(y-x_0)}{dx} = \frac{dr^2}{dx}$$

ou seja,

$$2(x-x_0)+2(y-y_0)\frac{dy}{dx}=0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{(x-x_0)}{(y-y_0)}$$

Logo, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_P=-\frac{(x^*-x_0)}{(y^*-y_0)}$.

Exemplo 24. *Seja a equação dada por*

$$x^2+xy+y^3-2x-x^2y=0 \tag{4.2.1}$$

A equação 4.2.1 envolve x e y de modo que não temos explicitamente, nem y como função de x e nem x como função de y. Entretanto esta equação define uma relação entre as variáveis x e y. Podemos dizer então que a equação 4.2.1 determina y como uma ou mais funções *implícitas* de x. Vamos supor que a equação 4.2.1 defina y como função de x em algum intervalo $[a,b]$, isto é, $y=f(x)$ para $x\in[a,b]$.

$$x^2+xf(x)+f^3(x)-2x-x^2f(x)=0 \tag{4.2.2}$$

Se $f(x)$ é uma função desconhecida porém derivável, podemos calcular $\frac{df}{dx}$, considerando a derivada em x de cada termo da equação 4.2.2:

$$2x+x\frac{df}{dx}+f(x)+3f^2(x)\frac{df}{dx}-2-2xf(x)-x^2\frac{df}{dx}=0$$

ou,

$$\frac{df}{dx}(x)=\frac{2+2xf(x)-2x-f(x)}{x+3f^2(x)-x^2} \tag{4.2.3}$$

A equação 4.2.3 nos dá uma relação entre $x, f(x)$ e $f'(x)$ e assim, para cada valor de $x\in[a,b]$, podemos calcular y na equação 4.2.1, obtendo $f(x)$ e portanto, determinar $f'(x)$.

Por exemplo, se $x=1$, da equação 4.2.1 vem:

$$1+y+y^3-2-y=0 \Longleftrightarrow y^3=1 \Longleftrightarrow y=1$$

Portanto, $f(1)=1$–Sustituindo estes valores na equação 4.2.3, obtemos

$$\frac{df}{dx}(1)=\frac{1}{3}$$

Exemplo 25. *Seja a equação*

$$x^2y+xy^2=6$$

determinar o valor de $\frac{dy}{dx}(1)$.

Solução: Suponhamos que $y = f(x)$ para algum intervalo $[a, b]$

$$x^2 f(x) + x f^2(x) = 6$$

Logo,

$$x^2 \frac{df}{dx} + 2xf(x) + 2xf(x)\frac{df}{dx} + f^2(x) = 0$$

Isolando o termo $\frac{df}{dx}$, obtemos

$$\frac{df}{dx} = \frac{-2xf(x) - f^2(x)}{x^2 + 2xf(x)} = \frac{-2xy - y^2}{x^2 + 2xy} \tag{4.2.4}$$

Observamos que a expressão 4.2.4 que define $\frac{dy}{dx}$, só é válida se $x \neq 0$ e $y \neq -\frac{x}{2}$.

Quando $x = 1$, temos $y + y^2 = 6 \Longrightarrow y = -3$ ou $y = 2$.

Se considerarmos só os valores positivos de y podemos ter $y = f(x)$ e assim, $f(1) = 2$. Substituindo estes valores na equação 4.2.4, obtemos $\frac{dy}{dx}(1) = -\frac{8}{5}$.

Exercício: Determine o campo de definição da função $y = f(x)$, $y > 0$.

O método da derivação implícita pode ser usado para determinar a derivada de funções irracionais (Cap. II, 3.3).

Teorema 17. *Se* $u = f(x)$ *é uma função derivável e se* $y = g(u) = u^{\frac{p}{q}}$, *com* p *e* q *inteiros e* $q > 0$, *então*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q} u^{(\frac{p}{q}-1)} \frac{du}{dx}$$

desde que $u \neq 0$ *se* $\frac{p}{q} < 1$.

Demonstração. Seja $y = u^{\frac{p}{q}}$ onde $u = f(x)$ é derivável. Então,

$$y^q = u^p$$

Derivando implicitamente ambos os membros da equação, obtemos

$$qy^{q-1}\frac{dy}{dx} = pu^{p-1}\frac{du}{dx}$$

Assim, se y≠ 0 (o mesmo que u≠ 0), temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{pu^{p-1}}{qy^{q-1}}\frac{du}{dx}$$

.

Por outro lado, $y^{q-1} = \left[u^{\frac{p}{q}}\right]^{q-1} = u^{p-\frac{p}{q}} \Longrightarrow \frac{u^{p-1}}{y^{q-1}} = u^{p-1-p+\frac{p}{q}} = u^{\frac{p}{q}-1}$. Logo,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q}u^{\frac{p}{q}-1}\frac{du}{dx}$$

□

Observação: Se $\frac{p}{q} < 1$ então $\frac{p}{q} - 1 < 0$ e portanto, $u^{\frac{p}{q}-1}$ não está definida quando $u = 0$.

Exemplo 26. *(1) Seja $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, com $x \geqslant 0$ então, $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$, $x \geqslant 0$.*

(2) Se $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, então $f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ e $f'(x)$ não é definida para $x = 0$.

(3) Seja

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 - 1}$$

temos, $f(x) = u^{\frac{1}{3}}$ onde, $u = x^3 + 2x^2 - 1$ e $\frac{p}{q} = \frac{1}{3} < 1$.

Assim,

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}\frac{du}{dx} = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(x^3 + 2x^2 - 1\right)^2}}\left(3x^2 + 4x\right)$$

$\frac{df}{dx}(x)$ não é definida quando $u = 0$, isto é, quando $x^3+2x^2-1 = 0 \Longleftrightarrow (x+1)\left(x^2+x+1\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

4.3 Exercícios de revisão para derivadas

(1) Calcule $\frac{dy}{dx}$ para as funções $y = f(x)$, usando a definição de derivada:

$$f(x) = x^3$$
$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$$
$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

(2) Determine a inclinação da curva (coeficiente angular da derivada):

$$y = x^4 - 1 \text{ no ponto } P = (1,0)$$

(3) A altura atingida após t segundos por uma bola atirada verticalmente para cima é de $s = 3t - \frac{1}{2}g\ t^2$ (g constante). Quando a bola atingirá a altura máxima?

(4) Calcule os valores a, b, c de modo que as parábolas

$$y = x^2 + ax + b \ \text{ e } \ y = -x^2 + cx$$

sejam tangentes no ponto $(0,1)$.

(5) Calcule as derivadas das seguintes funções

$$f(x) = \frac{1 - 2x - x^2}{x + x^2}$$
$$f(x) = \left(x^5 + 3x^4 + 2x^3 - x\right)^5$$
$$f(x) = \left[\frac{x-1}{x+1}\right]^3$$

(6) Use a regra da cadeia para calcular a derivada das funções

$$f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}}$$
$$f(x) = \sqrt[3]{\left(1 - \sqrt{x}\right)^2}$$
$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{2x+1}}$$

(7) Seja $f(x) = \left[1 + (1+x)^{100}\right]^2$ - Determine os valores de $f'(0)$ e $f'(1)$.

(8) Mostre que a função

$$y = f(x) = 1 - x^3 - x^5$$

é decrescente para todo $x \in \mathbb{R}$. Se $x = g(y)$ é a sua inversa, calcule $g' \circ f$.

(9) Seja

$$f(x) = \left| x^2 - 1 \right|$$

definida para todo x. Determine $f'(x)$ e seu domínio.

(10) Dada uma função f satisfazendo, para todo x, z

$$a) \quad f(x+z) = f(x).f(z)$$

$$b) \quad f(x) = 1 + xg(x), \text{ onde } \lim_{x \to 0} g(x) = 0$$

Prove que existe $f'(x)$ para todo x e $f'(x) = f(x)$.

(11) A função $f(x) = x^4 - 4x$ é crescente para $x > 1$ (verifique). Se $x = g(y)$ é sua inversa neste intervalo, determine $g'(0)$.

(12) Calcule $\frac{dy}{dx}$ nas curvas paramétricas

$$(a) \begin{cases} x = t - t^3 \\ y = t - t^2 \end{cases} ; \quad (b) \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases} \text{ com } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2};$$

$$(c) \begin{cases} x = \frac{t-1}{t+1} \\ y = \frac{t+1}{t-1} \end{cases} \text{ para } t = 2; \ (d) \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \text{ com } 0 \leq t \leq 2\pi$$

(13) determine as derivadas $\frac{dy}{dx}$ nas equações:

$$xy^2 - y + x = 0 \quad \text{para } x = \frac{1}{2}$$

$$y^3 + xy^2 + x^2y + 2x^3 = 0 \text{ para } x = 1$$

(14) Sabendo que $\frac{d(\frac{1}{x})}{dx} = -\frac{1}{x^2}$, use a regra da cadeia para mostrar que, se $y = f(x)$, então

$$\frac{d(\frac{1}{f})}{dx} = -\frac{f'}{f^2}$$

Derivada das funções trigonométricas

Como pré requisitos ao cálculo das derivadas de funções trigonométricas, devemos examinar alguns limites especiais. Consideremos a função

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (x \text{ medido em radianos})$$

Temos que $f(x)$ é definida para todo x com $x \neq 0$. Nossa intenção é calcular o limite especial:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

Consideremos inicialmente $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

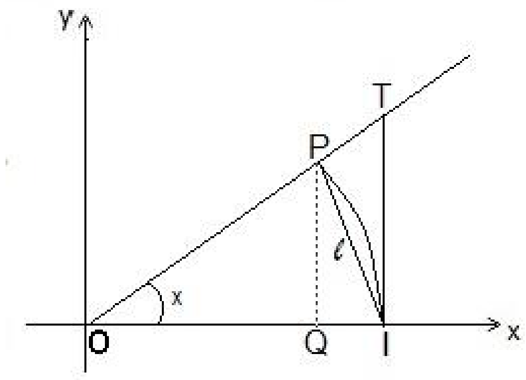


fig.4.8-Arco de circunferência

Na Figura 4.8, $\widehat{PI}$ é o arco de uma circunferência de raio 1. Os segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{TI}$ são perpendiculares ao eixo horizontal. Temos que:

$$\acute{A}rea\ \Delta IOP < \acute{A}rea \text{ do setor } IOP < \acute{A}rea\ \Delta IOT \tag{4.3.1}$$

Desde que $\overline{OP}$ e $\overline{OI}$ são iguais a 1, temos:

$$\acute{A}rea\ \Delta IOP = \frac{1}{2}\overline{PQ}\,.\overline{OI} = \frac{1}{2}\overline{PQ}$$
$$\acute{A}rea \text{ do setor } IOP = \frac{1}{2}xr^2 = \frac{1}{2}x$$
$$\acute{A}rea\ \Delta IOT = \frac{1}{2}\overline{TI}.\overline{OI} = \frac{1}{2}\overline{TI}$$

Por outro lado, sabemos que $\overline{PQ} = \sin x = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}$ e $tg\ x = \frac{\overline{TI}}{\overline{OI}} = \overline{TI}$.

Portanto, a desiguldade das áreas 4.3.1 pode ser escrita como

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}tg\ x \tag{4.3.2}$$

As desigualdades 4.3.2 implicam em

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

desde que $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (porque?). Logo,

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Agora, temos que $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$ e portanto, $\frac{\sin x}{x}$ está sempre entre 1 e um número que tende a 1, devendo pois se aproximar de 1 quando x tende a zero.

Em nossa demonstração geométrica consideramos $x > 0$. Entretanto, $\frac{\sin x}{x}$ é uma função par, ou seja, $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$. Portanto, quando $x \longrightarrow 0$, por valores negativos o resultado deve ser o mesmo que para valores positivos.

Conclusão:

$$\lim_{x} \to 0\frac{\sin x}{x} = 1$$

Consequências 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$$

De fato, $\frac{1-\cos x}{x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)} = \frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{(1+\cos x)}$;

Logo,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{(1+\cos x)} = 1.0 = 0$$

2. Se x é medido em graus então,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{180}$$

De fato, Temos que $\sin x$ e $\sin\frac{\pi}{180}x$ têm o mesmo valor,um medido em graus e o outro em radianos (verifique!). Assim,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{180}x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\pi}{180}\frac{\sin\frac{\pi}{180}x}{\frac{\pi}{180}x} = \frac{\pi}{180}\lim_{\frac{\pi}{180}x\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{180}x}{\frac{\pi}{180}x} = \frac{\pi}{180}$$

Observação: Esta é uma das razões porque as medidas em radianos é usada em Cálculo e sempre que se falar em função trigonométrica, a unidade da variável independente x será considerada em radianos.

Teorema 18. *Se $f(x) = sen\ x$ então, $f'(x) = cos\ x$.*

Demonstração. $f(x) = sen x \Longrightarrow f(x+h) = sen(x+h) = sen x \cos \text{h}+sen\ \text{h}\cos x$. Logo,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{sen x \cos h + sen h \cos x - sen x}{h} = \cos x \frac{sen h}{h} + sen x \frac{\cos h - 1}{h}.$$

Assim, $f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\cos x \frac{sen h}{h} + sen x \frac{\cos h-1}{h}\right] = \cos x \lim_{h\to 0} \frac{sen h}{h} + sen x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h-1}{h} = \cos x$.

Corolário 1. *Se $f(x) = sen u(x)$ então $f'(x) = cos\ u(x).u'(x)$.*

Prova: Basta usar a regra da cadeia (verifique).

Exemplo 27. *Seja $f(x) = sen(3x^2 - \frac{1}{x})$ com $x \neq 0$. Vamos determinar a função $f'(x)$.*

□

Solução: Tomando $u(x) = 3x^2 - \frac{1}{x} \Longrightarrow u'(x) = 6x + \frac{1}{x^2}$.

Logo, $f'(x) = \left[\cos(3x^2 - \frac{1}{x})\right]\left(6x + \frac{1}{x^2}\right)$.

Teorema 19. *Se $f(x) = \cos x$ então, $f'(x) = -sen\ x$.*

Demonstração. Temos que $\cos x = sen(\frac{\pi}{2} - x) \Longrightarrow$
$\frac{d\cos x}{dx} = \frac{d sen(\frac{\pi}{2}-x)}{dx} = \left[\cos(\frac{\pi}{2} - x)\right]\frac{d(\frac{\pi}{2}-x)}{dx} = \left[\cos(\frac{\pi}{2} - x)\right](-1) = -sen x.$ □

Como consequência dos teoremas anteriores temos:

1. $$\frac{d\cos u(x)}{dx} = -sen(u(x)).\frac{du}{dx}$$

2. $$\frac{d(tg\ x)}{dx} = \sec^2 x$$

3. $$\frac{d(\cot g\ x)}{dx} = -cossec^2 x$$

4. $$\frac{d(\sec x)}{dx} = \sec x\ tg\ x$$

5. $$\frac{d(cossecx)}{dx} = -cossecx \cot g\ x$$

Exercícios 1. Mostre que são válidas as cinco fórmulas anteriores.

2. Calcule os seguintes limites:

$$a)\lim_{h\to 0}\frac{sen(2h)}{h}; \qquad \text{b)}\lim_{x\to 0}\frac{sen\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[3]{x}}; \qquad \text{c)}\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\cos\theta - 1}$$

$$d)\lim_{x\to 0}\frac{tg\ x}{2x}; \qquad \text{e)}\lim_{x\to 0}\frac{sen^3 x}{x^3}; \qquad \text{f)}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{sen(x-1)}{x-\frac{\pi}{2}}$$

3). Calcule as derivadas das seguintes funções:

$$f(x) = \sqrt{1+\cos x}; \qquad f(x) = tg^3 x^2; \qquad f(x) = 2senx\cos x$$

$$f(x) = sennx; \qquad f(x) = sen^n x; \qquad f(x) = sen[\cos 3x)]$$

Derivada de ordem superior

A regra que associa a cada ponto x o coeficiente angular da reta tangente à curva $y = f(x)$, no ponto $(x, f(x))$, é também uma função de x, isto é, $f'(x)$ é uma função de x. desta forma, podemos também calcular sua derivada. A derivada da função derivada é denotada por $f''(x)$ e é denominada *derivada segunda* da função $f(x)$.este procedimento pode ser continuado e obtemos a derivada terceira $f'''(x)$, derivada quarta $f^{(4)}(x)$ etc. A n-ésima derivada de f, ou seja $f^{(n)}(x)$, é denominada *derivada de ordem n*.

Com a notação de Liebnitz temos

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2};$$
$$f'''(x) = \frac{d^3 f}{dx^3}$$
$$.......$$
$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$$

Uma função é dita *n-diferenciável* em $[a,b]$ se, para todo $x \in [a,b]$, existem as derivadas de ordens inferiores a n. As funções que são deriváveis de qualquer ordem são chamadas *funções analíticas.*

Exemplo 28. *A função $y = f(x) = senx$ tem derivada de qualquer ordem. Mostre que*

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} cox \;\; se \;\; n = 1, 5, ..., 1+4k \\ -senx \;\; se \;\; n = 2, 6, ..., 2+4k \\ -\cos x \;\; se \;\; n = 3, 7, ..., 3+4k \\ senx \;\; se \;\; n = 0, 4, ..., 4k \end{cases} \quad com \;\; k \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 29. *Se* $f(x) = x^4 - 2x^3 + \frac{1}{3}x$, *então*

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 6x^2 + \frac{1}{3}; \\ f''(x) &= 12x^2 - 12x; \\ f'''(x) &= 24x - 12; \\ f^{(4)}(x) &= 24; \\ f^{(n)}(x) &= 0 \;\; se \;\; n > 4 \end{aligned}$$

Exemplo 30. *Seja* $f(x) = x^{\frac{3}{2}} = x\sqrt{x}$, *então*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}; \\ f''(x) &= \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{4\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Observamos que, neste caso, $f(x)$ *tem derivada de primeira ordem no ponto* $x = 0$ *mas não tem derivada de ordem* n ($n \geqslant 2$) *neste ponto.*

Exercício 4. *Encontre* $f''(x)$ *das seguintes funções*

$$\begin{aligned} &(a) \; f(x) = x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{3}{2}} + x; \\ &(b) \; f(x) = tgx; \\ &(c) \;\; f(x) = \cos(\sqrt[3]{x^2}). \end{aligned}$$

Exercício 5. *Verifique a ordem de derivabilidade das funções*

$$\begin{aligned} &(a) \; f(x) = (2x+1)^{\frac{7}{3}}; \\ &(b) \; f(x) = \frac{x^3 - 2x}{\sqrt{2x-1}}; \\ &(c) \; f(x) = tg(cosx). \end{aligned}$$

Exercício 6. *Mostre que se* $f(x)$ *e* $g(x)$ *são duas funções definidas em* $[a,b]$ *com derivadas* *até segunda ordem em* $[a,b]$, *então*

$$[fg]''(x) = [fg'' + 2f'g' + f''g](x)$$

Exercício 7. *Seja* $h(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$. *Determine* $h^{(k)}(x)$ *para* $k \geqslant 1$ *e* $x \neq 0$.

Diferencial

Na notação de Liebnitz para derivada de um função $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, os termos dy e dx são usados apenas como símbolos representativos. Vamos agora dar uma definição para estes termos de modo que, quando $dx \neq 0$, a razão $\frac{dy}{dx}$ tenha o mesmo significado que a derivada de $y = f(x)$ em relaçãoà variável x.

Seja $y = f(x)$ uma função derivável em x, então

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \text{ (conforme Cap.IV, Prop.4.1)}$$

onde, $\alpha(\Delta x) \longrightarrow 0$ quando $\Delta x \to 0$ e $\alpha(0) = 0$.

Assim, o incremento Δy de uma função $y = f(x)$ consiste de duas parcelas:

∘ $f'(x)\Delta x$ - que depende de x e de Δx e é linear relativamente a Δx - denominado **diferencial da função** e denotado por dy ou $df(x)$.

$$dy = f'(x)\Delta x \text{ ou, na notação de Liebnitz, } dy = f'(x)dx$$

∘ $\alpha(\Delta x)\Delta x$ - depende de Δx e é tal que, para Δx suficientemente pequeno, é bem menor que dy.

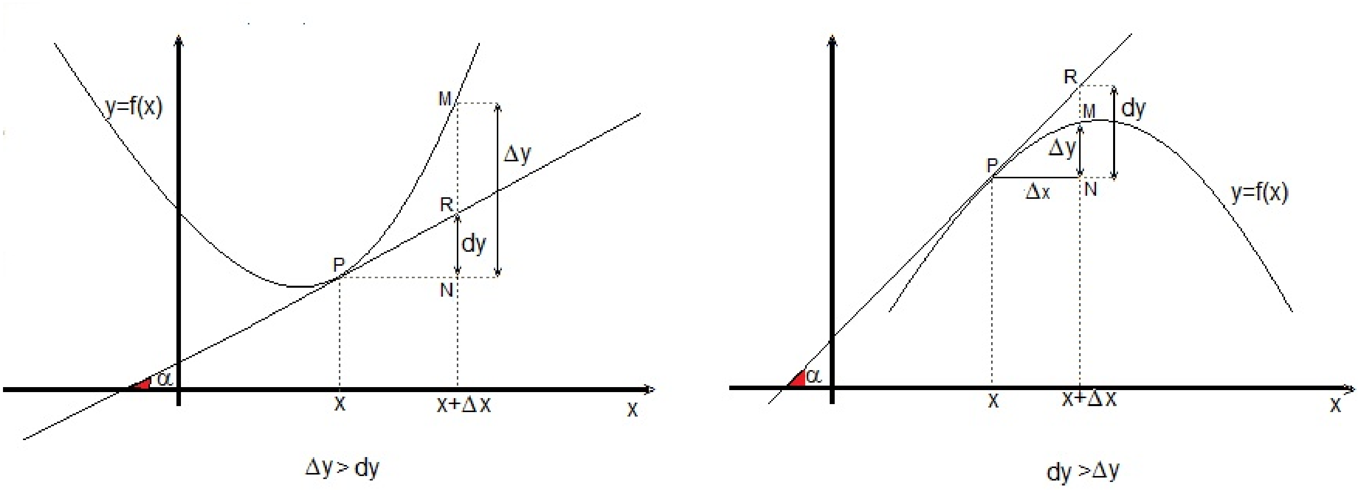


fig.4.9- Diferencial de uma função real

Observamos que se $y = f(x) = x$ então $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 1$ e portanto, o diferencial dy é dado por $dy = \Delta x$, o que sugere adotar o símbolo $dx = \Delta x$ para o *diferencial de x*. A igualdade $dx = \Delta x$ deve ser encarada como definição do diferencial da variável independente x. E, em qualquer caso, podemos escrever $dy = f'(x)dx$, ou seja,

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\text{diferencial de y}}{\text{diferencial de x}}$$

que justifica a notação dada por Liebnitz.

Exemplo 31. *Seja f(x)=x^2, vamos determinar os valores de dy e Δy quando $x = 10$ e $\Delta x = 0,01$.*

Solução:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$
$$dy = f'(x)\Delta x = 2x\Delta x$$

No ponto $x = 10$ e com $\Delta x = 0,01$, segue

$$\Delta y = 2 \times 10 \times 0,01 + 0,01^2 = 0,2001$$
$$dy = 2 \times 10 \times 0,01 = 0,2$$

Neste caso, se usarmos dy no lugar de Δy, o erro cometido é de $0,0001$ que poderia, em muitas situações práticas ser desprezado.

De uma maneira geral, em cálculos aproximados, podemos tomar $dy \approx \Delta y$, isto é, $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx$

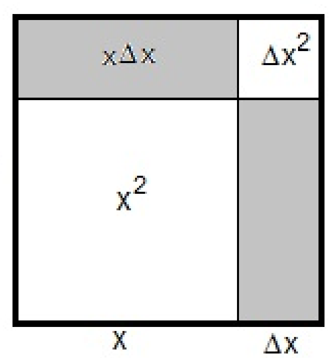


fig.4.10-Incremento da área de um quadrado

Exemplo 32. *Seja $f(x) = senx$, vamos mostrar que, para k próximo de zero temos*

$$senk \approx k$$

Solução: Consideremos a aproximação $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx$ com $f(x) = senx$.

$$sen(x+\Delta x) \approx senx + (\cos x)\Delta x$$

Então, para $x = 0$ e $\Delta x = k$ vem $senk \approx k$.

Em outras palavras temos que a função $y = senx$ é aproximada pela reta $y = x$ numa vizinhança da origem $x = 0$.

Exemplo 33. *Determinar o valor aproximado de $sen31^o$.*

Solução: Sejam $x = 30^o = \frac{\pi}{6}$ e $\Delta x = 1^o = \frac{\pi}{180}$.

Assim, $sen31^o = sen(30^o + 1^o) = sen(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180})$. Agora, usando o conceito de diferencial: $sen(x+\Delta x) \approx senx + (\cos x)\Delta x$, temos

$$sen(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}) \approx sen\frac{\pi}{6} + \left(\cos\frac{\pi}{6}\right)\frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180} \approx 0,5146$$

Exemplo 34. *Determinar um valor aproximado de $\sqrt{122}$.*

Solução: Consideremos a função $f(x) = \sqrt{x}$ e $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx$ para $x = 121$ e $\Delta x = 1$.

Assim, $\sqrt{122} = \sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x = 11 + \frac{1}{22} \simeq 11 + 0,0409 = 11,0409$.

Exemplo 35. *Calcular aproximadamente o valor de $(0,97)^5$.*

Solução: Basta tomar a função $y = x^5$ e usar a aproximação diferencial no ponto $x = 1$ com $\Delta x = -0,03$.

$$(x+\Delta x)^5 \approx x^5 + 5x^4\Delta x \Longleftrightarrow (0,97)^5 \approx 1 + 5.1^4.(-0,03) = 1 - 0,15 = 0,85$$

Observação: Quando fazemos a aproximação $\Delta y \approx dy$, estamos tomando valores sobre a reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto x e não sobre a própria curva. Isto significa que estamos aproximando a curva por uma reta (tangente) numa vizinhança do ponto x.

Propriedades do diferencial de uma função real O problema de encontrar o diferencial de uma função é equivalente ao de determinar a sua derivada uma vez que

$$dy = f'(x)dx$$

Deste modo, muitos resultados para derivadas também são válidos para o diferencial, senão vejamos:

Sejam u e v duas funções diferenciáveis num intervalo [a,b], então:

1.
$$d(u \pm v) = du \pm dv \quad \text{(Mostre!)};$$

2.
$$d(u.v) = udv + vdu$$

De fato, seja $y = u.v$, então $dy = y'dx = (uv' + vu')dx = uv'dx + vu'dx = udv + vdu$

3.
$$d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

4. Seja $y = f(u)$ e $u = g(x)$, ou $y = f(g(x))$, então

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)g'(x) \Rightarrow dy = f'(u)g'(x)dx$$

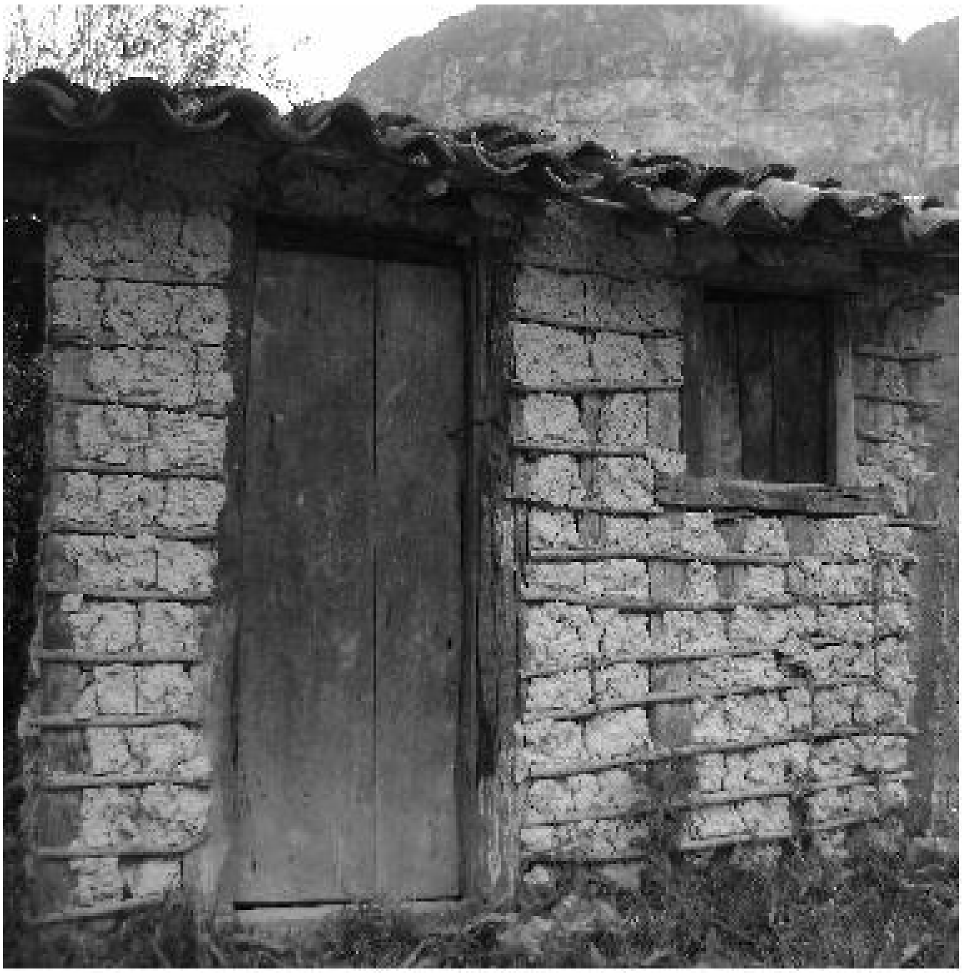
Exemplo 36. *Seja* $y = tg\sqrt{x-1}$ *, encontrar* dy*.*

Solução:Tomemos $y = tg\ u$ *e* $u = \sqrt{x-1} \Longrightarrow dy = \sec^2 u \frac{1}{2\sqrt{x-1}}dx$*.*

Por outro lado, $\frac{1}{2\sqrt{x-1}}dx = du$*, logo*

$$dy = \sec^2 u\ du = \left[\sec^2\left(\sqrt{x-1}\right)\right]\frac{1}{2\sqrt{x-1}}dx$$

5 Aplicações da Derivada



"Um matemático puro é pago para descobrir novos fatos matemáticos. Um matemático aplicado é pago para obter a solução de um problema específico".

V.I.Arnold

Vamos estudar neste Capítulo algumas aplicações do cálculo da derivada de uma função. Embora dando um caráter estritamente matemático a estas aplicações, salientamos que as mesmas têm importância fundamental em muitos problemas práticos.

5.0.1 Tangentes e Normais

A equação da reta que passa pelo ponto $P = (a, b)$ e tem coeficiente angular m é dada por

$$y - b = m(x - a).$$

Para se determinar a equação da reta tangente a uma curva no ponto P basta considerar seu coeficiente angular igual à inclinação da curva neste ponto, isto é, $m = f'(a)$. Assim, a equação da reta tangente é:

$$y - b = f'(a)(x - a)$$

A reta que passa pelo ponto P, perpendicular à reta tangente é denominada *reta normal à curva em P*. Seu coeficiente angular é dado por $m = -\frac{1}{f'(a)}$ se $f'(a) \neq 0$. Assim a equação da reta normal é

$$y - b = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

Exemplo 37. *Determinar as equações das retas tangente e normal à curva $y = f(x) = x^3 - 4x$ nos pontos $P_1 = (2, 0)$ e $P_2 = \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{16\sqrt{3}}{9}\right)$.*

Solução: Primeiramente devemos verificar se os pontos pertencem à curva.

Se $a = 2$, temos $y = 2^3 - 4.2 = 0 \Longrightarrow P_1 = (2, 0)$ satisfaz a equação da curva;

Se $a = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow y = \frac{16\sqrt{3}}{9}$ (verifique!).

A inclinação da curva no ponto P_1 é dada por

$$f'(2) = \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=2} = 3x^2 - 4\Big]_{x=2} = 8$$

Logo, a equação da reta tangente é

$$y - 0 = 8(x - 2) \ \text{,isto é, } y = 8x - 16$$

A equação da normal é

$$y = -\frac{1}{8}(x - 2) = -\frac{x}{8} + \frac{1}{4}$$

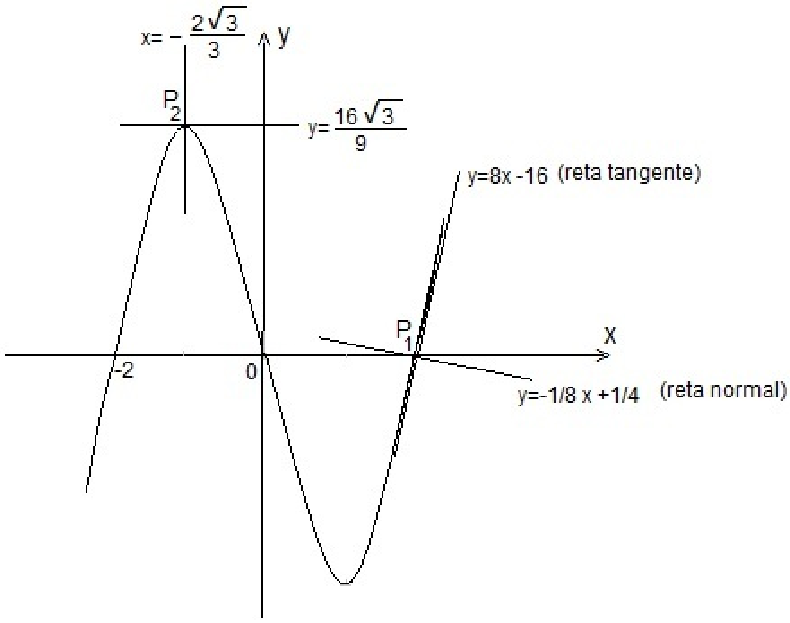


fig.5.1-Equações de retas tangentes e normais

Para o ponto P_2, temos inicialmente que

$$f'(-\frac{2\sqrt{3}}{3}) = 3x^2 - 4\Big]_{x=-\frac{2\sqrt{3}}{3}} = 0$$

Logo, a reta

$$y = \frac{16\sqrt{3}}{9}$$

é tangente à curva no ponto P_2.

Neste caso, não tem sentido calcular o coeficiente angular da reta normal à curva no ponto P_2 uma vez que$\left(-\frac{1}{f'(-\frac{2\sqrt{3}}{3})}\right)$ é indeterminado. Entretanto, como a reta normal é perpendicular à reta tangente $y = \frac{16\sqrt{3}}{9}$, deve ser também perpendicular ao eixo-x e passar pelo ponto P_2– portanto, sua equação será:

$$x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Exemplo 38. *Determinar a equação da família de circunferências que se tangenciam no ponto $P = (1, 1)$ e que têm a reta $y = x$ como tangente comum.*

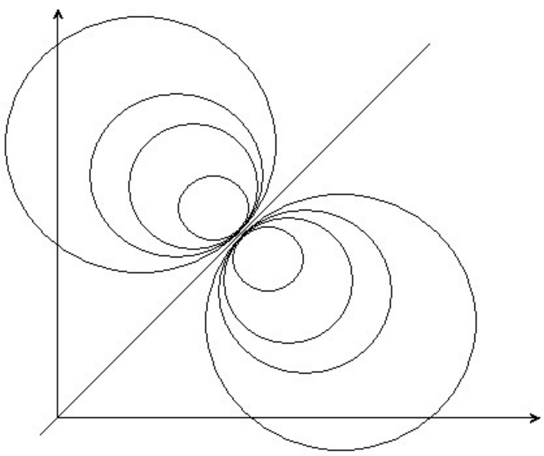


fig.5.2-Família de circunferências com ponto de tangência comum.

Solução: A equação geral de uma circunferência de raio r e centro no ponto (α, β) *é o lugar geométrico dos pontos do plano que distam de r do ponto fixo* (α, β)*, isto é,*

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2 \tag{5.0.1}$$

Sua inclinação num ponto genérico $P = (x, y)$ *é dada por (usando derivada implícita):*

$$2(x-\alpha) + 2(y-\beta)\frac{dy}{dx} = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\alpha - x}{y - \beta}$$

No ponto $(1,1)$*, temos*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha - 1}{1 - \beta} \quad \textit{com } \beta \neq 1$$

Sabemos também que a inclinação da curva é igual ao coeficiente angular da reta tangente no ponto considerado, logo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha - 1}{1 - \beta} = 1 \Longrightarrow \beta = 2 - \alpha \tag{5.0.2}$$

Sustituindo o valor de β *de 5.0.2 e o ponto* $(1,1)$ *na equação geral 5.0.1, obtemos*

$$(1-\alpha)^2 + (1-2+\alpha)^2 = r^2 \Longleftrightarrow r^2 = 2(\alpha - 1)^2$$

Portanto, a equação da família de curvas pedida será:

$$(x-\alpha)^2 + (y-2+\alpha)^2 = 2(\alpha-1)^2 \quad \textit{para } \alpha \neq 1 \textit{ (porque?)}$$

Observação: *Os centros das circunferências 5.0.2 são os pontos* $(\alpha, 2-\alpha)$. *Mostre que estes pontos estão sobre a reta normal à reta tangente* $y = x$, *no ponto* $(1,1)$.

Exercício 8. *1) Determine as equações das retas tangentes à curva* $y = x^3 - 2x^2$, *paralelas ao eixo-x.*

2) Dada a equação da circunferência

$$x^2 + y^2 = r^2$$

mostre que a reta tangente à circunferência em qualquer ponto P é perpendicular ao diâmetro que tem P por extremidade.

3) Mostre que as duas curvas

$$xy = 1 \ \ e \ \ y^2 = x^2 - 1$$

se cortam ortogonalmente.

4) Determine k de modo que a reta $y = 12x + k$ *seja tangente à curva* $y = x^3$.

5) Sejam C_1 *e* C_2 *duas curvas que se cortam em um ponto P. O ângulo* θ *entre as curvas é o ângulo formado por suas tangentes em P. Sejam*

$$y_1 = m_1 x + b \ \ \textit{a tangente à } C_1 \textit{ em } P$$
$$y_2 = m_2 x + b \ \ \textit{a tangente à } C_2 \textit{ em } P$$

mostre que

$$tg\ \beta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}. \tag{5.0.3}$$

6) Com base na fómula 5.0.3, determine o ângulo entre as curvas

$$x^2 + y^2 = 1 \quad e \quad y^2 = x$$

7) Dado um espelho parabólico (obtido pela rotação de uma parábola em torno de seu eixo de simetria) mostre que um raio luminoso, emanando do foco da parábola, se reflete paralelamente ao eixo.

Sugestões: (1) Lembrar que o ângulo de incidência é igual ao de reflexão.

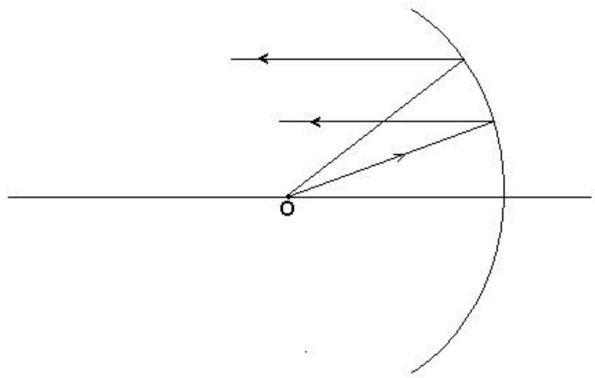


fig.5.3-Raios paralelos que emanam do foco de uma parábola

(2) Considera a parábola $y^2 = 4px$, cujo foco é o ponto $(p, 0) - (Mostre!)$

(3) Use a fórmula 5.0.3 do exercício 5.

5.0.2 Taxas Relacionadas

Os problemas de **taxas relacionadas** são aqueles que envolvem diversas variáveis relacionadas por meio de algum *parâmetro* como o tempo t por exemplo, onde dá-se, para alguma condição inicial t_0, valores destas variáveis, bem como *taxas de variações* de algumas delas, e pede-se para determinar outras taxas de variações quando $t = t_0$. A melhor explicação para este tipo de problema pode ser o próprio problema.

Exemplo 39. *Seja A a área de um quadrado de lado a; Qual a relação entre as variações dos lados $\frac{da}{dt}$ com a variação da área $\frac{dA}{dt}$?*

Solução: Devemos considerar um quadrado de lado a que varia com o tempo $a = a(t)$ e, portanto, $A = A(t)$. Agora, como $A = a^2$, segue-se que

$$\frac{dA}{dt} = 2a\frac{da}{dt} \tag{5.0.4}$$

e, desta forma obtivemos uma relação entre os crescimentos (ou decrescimentos) da área com as variações dos lados.

Exemplo 40. *Um balão esférico está enchendo à razão de $2m^3/\text{min}$. Determine a velocidade com que cresce o raio do balão no instante em que tal raio mede 3m. Considere, por simplicidade, que a pressão do gás seja constante em cada instante.*

Solução: A relação entre o volume do balão e o seu raio é

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \tag{5.0.5}$$

Sabemos que $\frac{dV}{dt} = 2\ m^3/\min$ *e queremos calcular* $\frac{dr}{dt}$ *quando* $r = 3m$;

Derivando 5.0.5 em relação a t*, obtemos:*

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \tag{5.0.6}$$

Logo, usando os dados do problema em 5.0.6, vem

$$2 = 4\pi(3)^2 \frac{dr}{dt} \Longrightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{36\pi} \simeq 0,00884\ m/\min$$

ou seja, o raio do balão cresce $0,00884\ m/\min$ *quando* $r = 3m$.

Exemplo 41. *Um reservatório cônico (vértice para baixo, conforme figura 5.4) de a metros de diâmetro e b metros de altura, escoa água à razão constante de* $\frac{a}{10}m^3/\min$*.Com que velocidade baixa o nível da água no reservatório no instante em que a altura vale* $\frac{1}{5}b$*?*

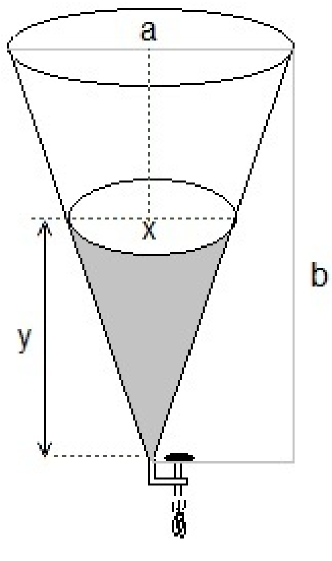


fig.5.5-Reservatório cônico

Solução: Seja $V = V(t)$ *o volume (em* m^3*) da água no reservatório no instante* t*;* $x = x(t)$ *o raio da secção do cone ao nível da água (em metros);* $y = y(t)$ *a altura da água no cone no instante* t*.*

Dizer que a água escoa à razão de $\frac{a}{10}m^3/\min$ *é o mesmo que* $\frac{dV}{dt} = \frac{a}{10}$ *e devemos determinar* $\frac{dy}{dt}$ *quando* $y = \frac{b}{5}$.

Quando a água está à altura y, seu volume no cone é dado por

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y \tag{5.0.7}$$

A relação 5.0.7 envolve, além da variável independente t as variáveis x e y. Entretanto, a variável x pode ser eliminada uma vez que temos:

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{a}{2b} \Longrightarrow x = \frac{a}{2b}y \tag{5.0.8}$$

Portanto, aplicando 5.0.8 em 5.0.7 vem

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2b}y\right)^2 y = \frac{\pi a^2}{12b^2}y^3 \tag{5.0.9}$$

Derivando 5.0.9 em relação a t, vem

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi a^2}{4b^2}y^2\frac{dy}{dt} \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{4b^2\frac{dV}{dt}}{\pi a^2\, y^2}$$

Assim, para $\frac{dV}{dt} = \frac{a}{10}$ *e* $y = \frac{b}{5}$, *obtemos*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a}{10}\frac{4b^2}{\pi a^2\, b^2}25 = \frac{10}{\pi a}\ m/min$$

Exercício 9. *(1) Dois carros A e B saem de um mesmo local no mesmo instante por estradas perpendiculares. O carro A desenvolve uma velocidade igual à metade da velocidade do carro B. Pergunta-se, com que velocidade varia a distância entre os carros depois de 2 horas de percurso?*

(2) Enche-se de água um reservatório cilíndrico de raio $r = 2m$ *e altura h=10m, à razão de* $4m^3/hora$. *Qual a taxa de variação da altura da água no reservatório quando o mesmo está com 1000 litros?*

(3) Uma partícula se move ao longo de uma circunferência de raio $r = 1$. *A velocidade de sua projeção sobre o diâmetro horizontal é* $\frac{dx}{dt} = y$, *onde y é a projeção da partícula sobre o diâmetro vertical. Calcule* $\frac{dy}{dt}$.

Sugestão: Use a equação da circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

5.1 Máximos e Mínimos

Seja f uma função definida no intervalo (a,b), dizemos que f tem um **máximo local** em um ponto $x_0 \in (a,b)$, se existir um valor $\delta > 0$ tal que $f(x) \leqslant f(x_0)$ para todo x satisfazendo $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$.

O **mínimo local** é definido analogamente, isto é, $f(x) \geqslant f(x_0)$ para todo x satisfazendo $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$.

Observamos que o intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (a,b)$.

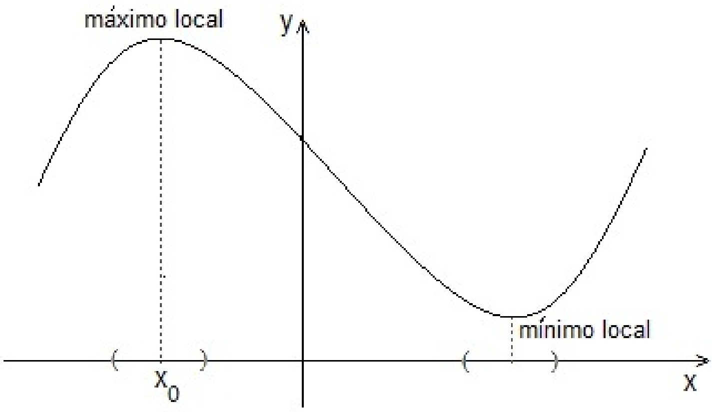


fig.5.6-Máximo e mínimo locais

f tem um **máximo absoluto ou global** se para algum $x_0 \in [a,b]$, $f(x) \leqslant f(x_0)$ para todo $x \in [a,b]$, isto é, o valor de $f(x_0)$ é maior ou igual a todos os outros valores de $f(x)$ com x em $[a,b]$; Se f tem máximo absoluto em x_0 então este ponto também é máximo local mas a recíproca não é verdadeira.

f tem um **mínimo absoluto ou global** se para algum $x_0 \in [a,b]$, $f(x) \geqslant f(x_0)$ para todo $x \in [a,b]$.

Lembrando o Teorema de Weierstrass do Cap. II, podemos reescrevê-lo como:

"Se f é uma função contínua em um intervalo fechado $[a,b]$ então f tem um máximo e um mínimo absolutos em $[a,b]$"

Vamos agora apresentar alguns resultados que relacionam pontos de máximo ou mínimo de uma função com sua derivada.

Teorema 20. *Seja $y = f(x)$ definida e diferenciável em um intervalo $a \leqslant x \leqslant b$. Se f tem um máximo local ou um mínimo local em $x_0 \in (a,b)$, então $f'(x_0) = 0$.*

Demonstração. Vamos fazer a demonstração no caso em que x_0 é ponto de máximo local; A prova para mínimo local é análoga e fica como exercício.

Temos: $a < x_0 < b$ e $f(x) \leqslant f(x_0)$ para todo x satisfazendo $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ onde, δ é um número positivo.

Consideremos agora $0 < h < \delta$, então $f(x_0 + h) \leqslant f(x_0)$ e portanto,

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leqslant 0 \ \text{ para todo } 0 < h < \delta$$

Logo,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0^+) \leqslant 0$$

Se $h < 0$ e $-h < \delta$, temos ainda $f(x_0 + h) \leqslant f(x_0)$ e portanto,

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geqslant 0 \ \text{ para todo } 0 < -h < \delta$$

Logo,

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0^-) \geqslant 0$$

Assim,

$$f'(x_0^+) \leqslant 0 \leqslant f'(x_0^-)$$

Por outro lado, como a função f é derivável em x_0, temos que $f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = f'(x_0) \Longrightarrow f'(x_0) = 0.cqd.$ □

A condição de diferenciabilidade de f nos pontos a e b não é necessária mas é fundamental que seja diferenciável em $(a,b) - Justifique$!

Pergunta: Se o máximo local fosse no ponto $x_0 = a$ ou $x_0 = b$ o que se poderia concluir em relação à $f'(a)$ ou $f'(b)$?

Observação: A recíproca do teorema não é verdadeira, isto é, se $f'(x_0) = 0$ para algum x_0 em (a,b) o ponto x_0 pode não ser nem de máximo ou de mínimo locais.

Exemplo 42. *$f(x) = (x-1)^3$ definida para $x \in [0,2]$, é diferenciável neste intervalo e tal que $f'(1) = 3(x-1)^2\big]_{x=1} = 0$, entretanto, $x_0 = 1$ não é ponto nem de máximo e nem de mínimo pois se $x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1)$ e se $x < 1 \Rightarrow f(x) < f(1)$, ou seja, f é uma função crescente no ponto $x_0 = 1$.*

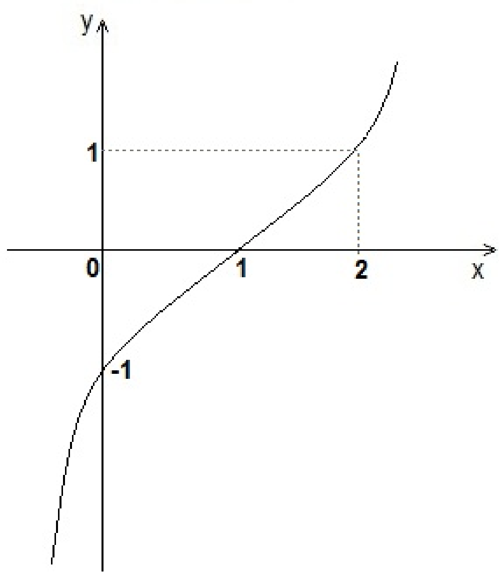


fig.5.7-O ponto x_0 é um ponto de inflexão da curva

Observação: Se uma função $f(x)$, diferenciável em um ponto x_0, é tal que $f'(x_0) = 0$ e x_0 não é ponto de máximo ou de mínimo locais, então dizemos que x_0 é um *ponto de inflexão de f.*

De uma maneira geral, dizemos que x_0 é um *ponto crítico* de f se $f'(x_0) = 0$.

Como consequência do teorema anterior temos o seguinte resultado:

Corolário 2. *Seja $y = f(x)$ definida e diferenciável em um intervalo $a \leqslant x \leqslant b$. Se $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$, então o máximo e o mínimo absolutos de f são os pontos a e b e, somente estes pontos.*

Demonstração. O Teorema de Weiestrass garante a existência de pontos de máximo e mínimo em $[a,b]$. Agora, do fato que $f'(x) \neq 0$ para x em (a,b), então, conforme o teorema anterior f não tem máximo e nem mínimo em (a,b). Logo, segue-se que estes pontos críticos estão nas extremidades do intervalo. □

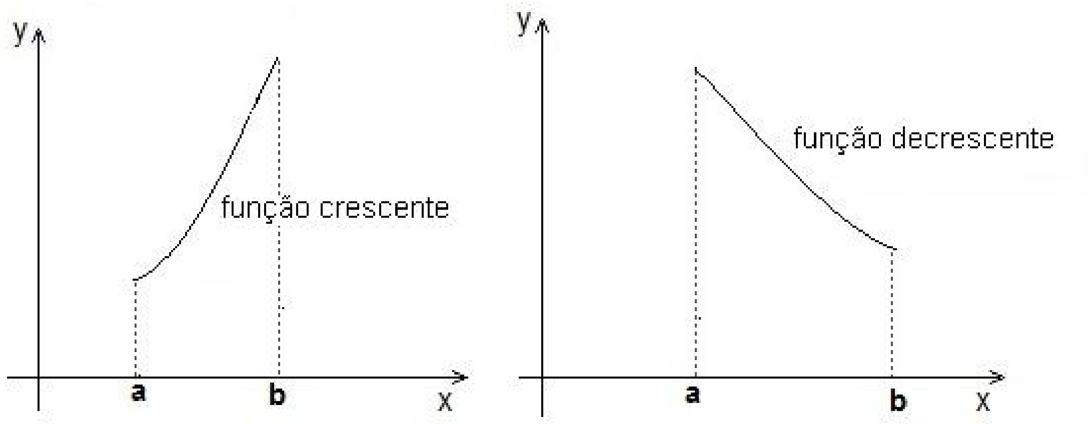


fig.5.8-Os pontos de máximo e mínimo estão nas extremidades do intervalo

Observação: Se uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, diferenciável em (a,b) e não tem pontos de máximo ou de mínimo em (a,b) então, f é *monótona* em $[a,b]$.

De fato, se f não tem pontos de máximo ou de mínimo em (a,b) então $f'(x) \neq 0$. Suponhamos que $f'(x) > 0$ em (a,b) então

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x+h)-f(x) > 0 & \text{se } h > 0 \\ f(x)-f(x+h) > 0 & \text{se } h < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x+h) > f(x) & \text{se } h > 0 \\ f(x) > f(x+h) & \text{se } h < 0 \end{cases}$$

Logo, f é crescente em $[a,b]$.

Se $f'(x) < 0$ em (a,b), a demonstração é análoga.

Exemplo 43. *A função $f(x) = x^3 + x$ é crescente em $\mathbb{R}$ pois $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Exemplo 44. *A função $f(x) = x^4$ tem derivada $f'(x) = 4x^3$, então f é crescente se $4x^3 > 0 \Leftrightarrow x > 0$ e f é decrescente se $x < 0$. Logo o ponto $x = 0$ é um ponto de mínimo de f.*

Exemplo 45. *Encontrar o máximo e o mínimo absolutos da função*

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 12 \ \ com\ 0 \leqq x \leqq 3.$$

Solução: Desde que f é contínua em $[0,3]$ sabemos que tem um mínimo e um máximo absolutos neste intervalo (Teor. de Weierstrass); Se o mínimo ou máximo ocorrem em $(0,3)$, devemos ter $f'(x) = 0$ em $(0,3)$; Temos:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$$

Logo, $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = -3$ ou $x = 1$. Agora, $x = -3$ não pertence ao intervalo $[0,3]$ e portanto, somente $x = 1$ pode ser ponto de máximo ou de mínimo local de f no intervalo $(0,3)$.

Por outro lado, temos: $f(1) = 7$; $f(0) = 12$ e $f(3) = 39$–Concluimos então que $x = 1$ é ponto de mínimo absoluto e $x = 3$ é ponto de máximo absoluto de f no intervalo $[0,3]$.

Definição 14. *Seja uma função $f(x)$, diferenciável em um ponto x_0 e tal que $f'(x_0) = 0$. Se x_0 não é um ponto de máximo nem de mínimo locais de f, então dizemos que x_0 é um* ponto de inflexão de f.

De uma maneira geral, dizemos que x_0 é um *ponto crítico de f* se $f'(x_0) = 0$.

Exercício 10. *Com a função do exemplo anterior, achar os pontos de máximo e mínimo absolutos quando $2 \leqq x \leqq 5$.*

Exercício 11. *Dada a função $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ com $-2 \leqq x \leqq 2$. Encontre e analise seus pontos críticos locais e absolutos.*

O resultado que se segue tem muita importância por suas aplicações no Cálculo.

Teorema 21. ***(de Rolle)*** *Seja $y = f(x)$ contínua em um intervalo fechado $[a,b]$, diferenciável em (a,b) e satisfazendo $f(a) = f(b)$. Então, existe pelo menos um ponto x_0 em (a,b) tal que $f'(x_0) = 0$.*

Demonstração. Suponhamos que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$; segue-se que f tem um máximo e um mínimo nos extremos a e b do intervalo. Agora, como $f(a) = f(b)$, a única possibilidade é que $f(x)$ seja constante em $[a,b] \Rightarrow f'(x) = 0$ para todo x (absurdo pois supomos que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$). Assim, f' deve se anular para algum ponto x_0 em (a,b)

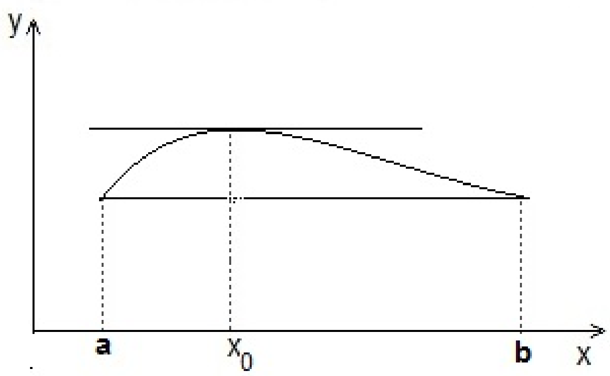


fig.5.9-Esquema gráfico do Teorema de Rolle

□

O Teorema de Rolle pode não valer se qualquer das hipóteses não for satisfeita:
1.Se $f(a) \neq f(b)$ - Ex. $f(x) = x^2$ para $0 \leqq x \leqq 2$;
2. Se $f(x)$ é não diferenciável em (a,b) - Ex. $f(x) = |x|$ para $-2 \leqq x \leqq 2$ (verifique);
3. Se $f(x)$ não é contínua em $[a,b]$ - Ex. $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ para } -2 \leqq x < 0 \text{ ou } 0 < x < 2 \\ 0 \text{ para } x = 2 \end{cases}$

Teorema 22. *(da Média ou de Lagrange) Seja $y = f(x)$ contínua em um intervalo fechado $[a,b]$ e diferenciável em (a,b). Então, existe ao menos um ponto x_0 em (a,b), tal que*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Observação: O resultado é equivalente a dizer que existe um ponto x_0 em (a,b), tal que a reta tangente à curva no ponto $(x_0, f(x_0))$ é paralela à reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ e, neste sentido, este teorema pode ser considerado como uma generalização do Teorema de Rolle.

Demonstração. Seja

$$g(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\right]$$

A função $g(x)$ assim definida é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b) e satisfaz o Teorema de Rolle, ou seja,

$$g(a) = f(a) - f(a) = 0$$
$$g(b) = f(b) - f(b) = 0$$

Portanto, existe ao menos um ponto x_0 em (a,b), tal que $g'(x_0) = 0$. □

Como

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Segue-se que $g'(x_0) = 0 = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Longrightarrow$

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

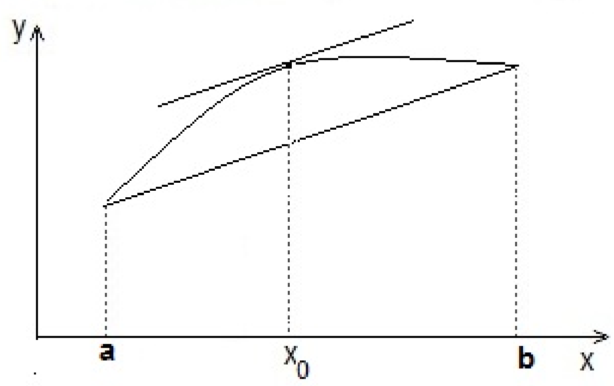


fig.5.10-Representação gráfica do Teorema de Lagrange

Exemplo 46. *Seja* $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ *definida em* $1 \leqq x \leqq 2$. *Encontre o valor de* x_0 *tal que* $x_0 \in (1,2)$ *e* $f'(x_0) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$.

Solução: Temos que

$$f'(x) = \frac{(x+2)-(x+1)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}.$$

Devemos pois resolver a equação $f'(x_0) = \frac{1}{12} \Longrightarrow$

$$\frac{1}{(x_0+2)^2} = \frac{1}{12} \Longleftrightarrow x_0^2 + 4x_0 - 8 = 0 \Rightarrow x_0 = 2(-1 \pm \sqrt{3}).$$

Logo a resposta do problema é $x_0 = 2(-1+\sqrt{3}) \in (1,2)$ *e* $x_0 = 2(-1-\sqrt{3})$ *deve ser desprezado pois não pertence ao intervalo* $(1,2)$.

Proposição 16. *Seja* $y = f(x)$ *contínua em* $[a,b]$ *e diferenciável em* (a,b). *Se* $f'(x) \equiv 0$ *em* (a,b), *então* $f(x)$ *é constante em* $[a,b]$.

Demonstração. sejam x_1 e x_2 com $x_1 < x_2$, dois pontos de $[a,b]$. Vamos aplicar o Teorema da Média no intervalo $[x_1, x_2]$:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1) \text{ com } x_1 < x_0 < x_2;$$

Como $f'(x_0) = 0$ por hipótese e, $x_1 \neq x_2$, segue-se que $f(x_2) = f(x_1) = k$ para todo par x_1, x_2 de $[a,b]$. □

Proposição 17. *Se f e g são definidas e diferenciáveis em* $[a,b]$ *e* $f'(x) = g'(x)$ *para todo* $x \in [a,b]$ *então* $f(x) = g(x) + k$ *em* $[a,b]$.

Demonstração. Faça como exercício.

Sugestão: Considere a função $h(x) = f(x) - g(x)$ e use a Proposição anterior. □

Exercício 12. *1. dada a função*

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x} \text{ definida para } x \in [1,2],$$

encontre $x_0 \in (1,2)$ *tal que*

$$f'(x_0) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{3}{2}$$

Exercício 13. *2. Se* $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-1}$*, discuta a validade do Teorema da Média no intervalo* $[0,2]$.

Exercício 14. *3. Mostre que se f e g são definidas e diferenciáveis em* $[a,b]$*, com* $f(a) = g(a)$ *e* $f(b) = g(b)$ *então* $f'(x_0) = g'(x_0)$ *para algum* $x_0 \in (a,b)$.

Sugestão: Use o Teorema de Rolle.

Exercício 15. *4. Determine os intervalos de crescimento (ou decrescimento) das funções definidas em* $\mathbb{R}$:

(a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$;

(b) $f(x) = x^3 - 1$;

(c) $f(x) = \cos^2 x - 2\sin x$

Exercício 16. *5. Dadas as seguintes funções, determine se têm pontos críticos nos respectivos intervalos onde estão definidas:*

(a) $f(x) = senx + \cos x$ *para* $x \in [0,\pi]$;

(b) $f(x) = x^4 - 1$ *para* $x \in [-2,2]$;

(c) $f(x) = \frac{3x-2}{2x+3}$ *para* $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 17. *6. Dada a função* $f(x) = x^{\frac{5}{3}} + 5x^{\frac{2}{3}}$*, mostre que o ponto* $x = -2$ *é de máximo para f.*

Aplicações usando a derivada segunda

É evidente que quanto mais informação tivermos a respeito de uma função tanto mais fácil será desenhar seu gráfico. A derivada segunda de uma função nos dá um critério para decidir se um ponto crítico é de máximo, mínimo ou inflexão.

Definição 15. *Dizemos que uma curva é* côncava para cima *em um intervalo $[a,b]$, se em cada ponto deste intervalo, o gráfico da função está sempre à cima da reta tangente à curva neste ponto. Será* côncava para baixo *se estiver à baixo da reta tangente em cada ponto.*

De uma maneira mais abrangente podemos definir a concavidade mesmo de curvas contínuas e não deriváveis em $[a,b]$: Uma curva é côncava para cima (*respectivamente,* para baixo*) em um intervalo $[a,b]$ se a curva estiver à baixo (respectivamente, à cima) da reta que liga os pontos $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$.*

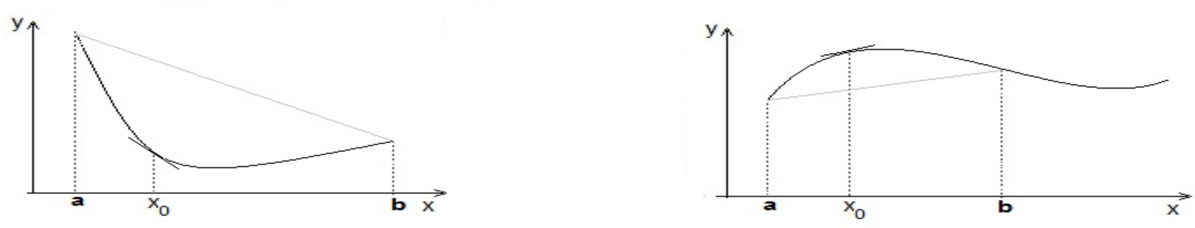


fig.5.11(a) Côncava para cima *(b) Côncava para baixo*

Teorema 23. *Seja $y = f(x)$ definida em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b) até, pelo menos, segunda ordem.*

(a) Se $f''(x) > 0$ para $a < x < b$, então a curva definida pela f é côncava para cima;

(b) Se $f''(x) < 0$ para $a < x < b$, então a curva definida pela f é côncava para baixo.

Demonstração. Vamos demonstrar o caso (a) uma vez que o outro é análogo.

Devemos mostrar que a curva está sempre à cima da reta tangente em qualquer ponto do intervalo (a,b).

Seja x_0 um ponto qualquer de (a,b). A reta tangente em x_0 tem a equação

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\ (x - x_0) \quad \text{ou} \quad y = f(x_0) + f'(x_0)\ (x - x_0)$$

Devemos mostrar que

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)\ (x - x_0) \quad \text{para todo } x \in (a,b) \tag{5.1.1}$$

Temos 3 alternativas:

1. Se $x = x_0$, então 5.1.1 é satisfeita pois $f(x_0) \geqslant f(x_0)$;

2. Se $x > x_0$, existe x_1 com $x_0 < x_1 < x$, tal que vale o Teorema da Média

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_1)\ (x - x_0) \tag{5.1.2}$$

Agora, do fato de $f''(x) > 0$ para $a < x < b$ (hipótese), segue-se que f' é crescente em (a,b) e, portanto, $f'(x_1) > f'(x_0) \Longrightarrow$

$$f'(x_1)(x - x_0) > f'(x_0)(x - x_0) \text{ pois } (x - x_0) > 0 \tag{5.1.3}$$

Usando a desigualdade 5.1.3 na equação 5.1.2, obtemos

$$f(x) - f(x_0) > f'(x_0)\ (x - x_0) \Longleftrightarrow f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)\ (x - x_0) \quad \text{cqd}$$

3. Para $x < x_0$, usa-se o mesmo raciocínio - Faça como exercício!

Também, a demonstração da parte (b) é equivalente à da parte (a) e constitui um bom exercício para o estudante interessado. □

Critério para decisão a respeito da natureza de um ponto crítico Podemos estabelecer a natureza de um ponto crítico, usando a segunda derivada de uma função:

Teorema 24. *Seja $y = f(x)$ definida em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b) até, pelo menos, segunda ordem e com f'' contínua em (a,b). Seja $x_0 \in (a,b)$ um ponto crítico de f, isto é, $f'(x_0) = 0$. Então,*

(a) Se $f''(x_0) > 0$, o ponto x_0 é de mínimo para f;

(b) Se $f''(x_0) < 0$, o ponto x_0 é de máximo para f;

(c) Se Se $f''(x_0) = 0$, o ponto x_0 pode ser de mínimo se a concavidade de f em x_0 for para cima; de máximo se a concavidade de f em x_0 for para baixo e será de inflexão se mudar de concavidade em x_0.

Demonstração. (a) Como $f'(x_0) = 0$, então a reta tangente à curva em $(x_0, f(x_0))$ é paralela ao eixo-x. Como $f''(x_0) > 0$, a curva é côncava para cima em uma vizinhança de x_0 pois f'' é contínua em (a,b). Logo, a função f tem um mínimo em x_0.

(b) A prova é análoga à anterior;

(c) Segue do fato que f'' é contínua em (a,b) e, portanto, a concavidade no ponto x_0 implica a mesma concavidade numa vizinhança deste ponto. Por outro lado, se o ponto crítico não for de máximo ou de mínimo então será de inflexão (muda de concavidade em x_0). □

Observação: Se $f'(x_0) \neq 0$ e $f''(x_0) = 0$ então, f tem um ponto de inflexão em x_0, desde que $f''(x_0) \neq 0$ numa vizinhança de x_0.

Exemplo 47. *Analise os pontos críticos da função* $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ *com* x *em* $\mathbb{R}$.

Solução: Temos que

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

Os pontos críticos de f são obtidos de $f'(x) = 3x^2 - 4x = 0 \Longrightarrow x = 0 \quad ou \quad x = \frac{4}{3}$.

A derivada de segunda ordem de f é dada por

$$f''(x) = 6x - 4$$

Para o ponto $x_0 = 0 \Longrightarrow f''(x_0) = -4 < 0 \Longrightarrow x_0 = 0$ *é ponto de máximo local para f; Para o ponto* $x_1 = \frac{4}{3}$, $f''(x_1) = 6\frac{4}{3} - 4 = 4 > 0 \Longrightarrow x_1 = \frac{4}{3}$ *é um ponto de mínimo local de f.*

Temos ainda que $f''(x) = 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$ *e* $f'(\frac{2}{3}) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4\frac{2}{3} = -\frac{4}{3} \neq 0 \Longrightarrow x = \frac{2}{3}$ *é um ponto de inflexão da curva definida por f.*

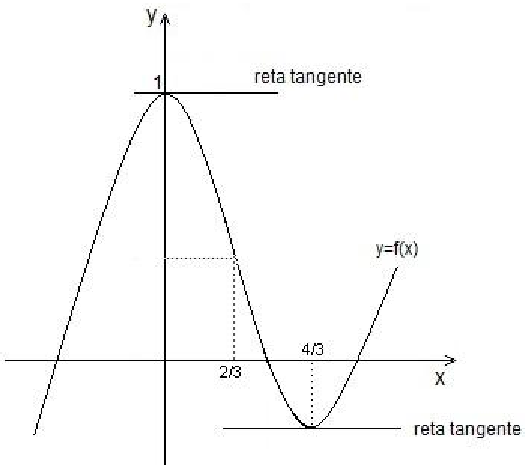


fig.5.12-Gráfico da função f num intervalo que contem seus pontos críticos

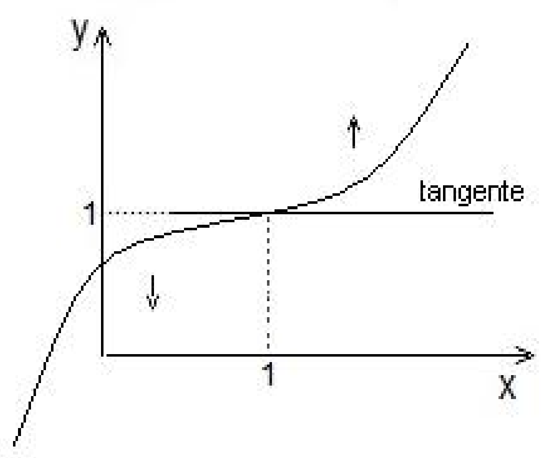
Exemplo 48. *Seja a função* $f(x) = (x-1)^3 + 1$. *Analise seus pontos críticos.*

Solução: Temos $f'(x) = 3(x-1)^2$; *Logo,* $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$. *Ainda,* $f''(x) = 6(x-1) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$. *Assim,* $f'(1) = f''(1) = 0$ *e, neste caso, o critério falha.*

Devemos então analisar a concavidade de f numa vizinhança do ponto $x = 1$:

$f''(x) = 6(x-1) > 0 \Longleftrightarrow x > 1$ *e* $f''(x) = 6(x-1) < 0 \Longleftrightarrow x < 1$ *portanto, a curva muda de concavidade no ponto* $\Longrightarrow x = 1$ *é um ponto de inflexão.*

A função f não tem pontos de máximo ou mínimo locais em $\mathbb{R}$,*uma vez que* $f'(x) = 3(x-1)^2 > 0$ *para* $x \neq 1$, *o que implica que f é monótona crescente. Se f estivesse definida* *num intervalo fechado* $[a,b]$ *então,* f *teria um ponto de mínimo absoluto em* $x = a$ *e um ponto de máximo absoluto em* $x = b$*.*



$fig.5.13 -$ *A reta tangente "corta" a curva no ponto de inflexão*

Exercício 18. *1. Analise os pontos críticos das funções:*

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$$
$$f(x) = x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 2x$$
$$f(x) = \sin 2x$$

Aplicações de máximos e mínimos

O estudo dos máximos e mínimos é um instrumento muito importante para resolver problemas de otimização, lembrando que na Natureza o fenômenos ocorrem, quase sempre, considerando-se o *máximo rendimento com o mínimo esforço.* Veremos alguns exemplos para que o aluno se familiarize com a técnica das soluções.

Exemplo 49. *1. Seja* p *o perímetro de um retângulo. Determine seus lados de modo que sua área seja a maior possível.*

Solução: Sejam a *e* b *os lados de um retângulo genérico.* $a, b \geqq 0$*. Desde que* p *é seu perímetro conhecido, devemos ter* $p = 2a + 2b \Longrightarrow a = \frac{p-2b}{2} = \frac{p}{2} - b$*.*

Exemplo 50. *A área que deve ser máxima depende dos valores dos lados do retângulo, isto é,*

$$A = a \times b = \left(\frac{p}{2} - b\right)b \Longrightarrow A(b) = \frac{pb}{2} - b^2$$

Agora, como desejamos que a área seja máxima, devemos procurar um ponto de máximo da função $A = f(b)$*, no intervalo* $\left[0, \frac{p}{2}\right]$ *(são os extremos possíveis para o valor de b).*

A função f(b) é diferenciável em $\left(0, \frac{p}{2}\right)$ *e* $f'(b) = \frac{p}{2} - 2b$*. Logo,* $f'(b) = 0 \Leftrightarrow b = \frac{p}{4} \Rightarrow a = \frac{p}{2} - b = \frac{p}{4} = b$*.*

Por outro lado, $f''(b) = -2 < 0$ *para todo* $b \in \left(0, \frac{p}{2}\right) \Longrightarrow b = a = \frac{p}{4}$ *é ponto de máximo da área, ou seja, o retângulo de área máxima com prímetro p deve ser o quadrado de lado* $b = a = \frac{p}{4}$*.*

Obs.: Se $a = 0$ $(b = \frac{p}{2})$ ou equivalentemente, $a = \frac{p}{2}$ $(b = 0) \Longleftrightarrow A = 0$, o que dá o retângulo de área mínima.

Exemplo 51. *2. Um arame de comprimento L é cortado em duas partes - Com uma faz-se um quadrado e com a outra um retângulo equilátero. Em que ponto deve-se cortar o arame para que a soma das áreas das figuras seja máxima?*

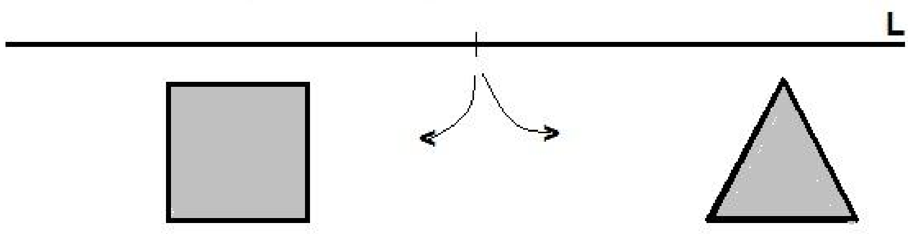


fig.5.14-Esquema das figuras construidas com o arame cortado

Solução: A soma das áreas é

$$A = a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 \tag{5.1.4}$$

onde, a^2 *é a área do quadrado de lado a e* $\frac{\sqrt{3}}{4}b^2$ *é a área do triângulo equilátero de lado b.*

Como o arame tem comprimento L, então $L = 4a + 3b \Longrightarrow a = \frac{L-3b}{4}$*. Substituindo o valor de a na equação 5.1.4, obtemos A como função de apenas uma variável:*

$$\begin{aligned} A(b) &= \left[\frac{L-3b}{4}\right]^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 = \frac{L^2 - 6Lb + 9b^2 + 4\sqrt{3}b^2}{16} \\ &= \frac{1}{16}\left[\left(9 + 4\sqrt{3}\right)b^2 - 6Lb + L^2\right] \end{aligned}$$

Devemos determinar um valor para b de modo que A seja máxima para este valor:

$$A'(b) = -\frac{3}{2}(L - 3b) + \frac{b\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{2}L + \frac{9+\sqrt{3}}{2}b$$

Então,

$$f'(b) = 0 \Longleftrightarrow b = \frac{3L}{9+\sqrt{3}}$$

Por outro lado, $A''(\frac{3L}{9+\sqrt{3}}) = \frac{9+\sqrt{3}}{2} > 0 \Longrightarrow$ *a soma das áreas será mínima (critério da segunda derivada) quando* $b = \frac{3L}{9+\sqrt{3}} \Longleftrightarrow a = \frac{1}{4}\left(L - \frac{9L}{9+\sqrt{3}}\right)$.

O fato da função $A(b)$ *ser contínua no intervalo* $\left[0, \frac{L}{3}\right]$ *então deverá assumir um máximo e um mínimo absolutos em* $\left[0, \frac{L}{3}\right]$ *(conforme Teorema de Weierstrass). Como somente assume um mínimo no interior deste intervalo, então o máximo deve ser assumido em um dos extremos deste intervalo:*

Se $b = 0$ *e portanto* $a = \frac{L}{4}$, *temos* $A(0) = \left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}L^2$;

Se $b = \frac{L}{3}$ *e portanto,* $a = 0$, *temos* $A(\frac{L}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{L}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{36}L^2$

Como, $\frac{\sqrt{3}}{36}L^2 < \frac{1}{16}L^2$ *(porque* $\frac{4}{9}\sqrt{3} < 1$ *e* $\sqrt{3} < 2$*), segue-se que* A *é máxima quando não se corta o arame, formando somente um quadrado de lado* $a = \frac{L}{4}$.

Exemplo 52. *3. A soma de um número e o dobro de outro é 30. Encontrar estes números de modo que seu produto seja o maior possível.*

Solução: Sejam x *e* y *estes números. Seu produto* p *será uma função dos dois valores, isto é,*

$$p = x.y$$

Agora, como $x + 2y = 30$, *então* $y = \frac{30-x}{2}$. *O produto em função de apenas uma variável é dado por:*

$$p(x) = x\frac{30-x}{2} = \frac{30x - x^2}{2} \quad com\ x \in [0, 30].$$

$p(x)$ *é uma função diferenciável em* $(0, 30)$ *e*

$$p'(x) = 15 - x$$

Logo,

$$p'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 15$$

Temos também

$$p''(x) = -1 < 0 \quad para\ todo\ x \in [0, 30]$$

Logo, o número $x = 15$ *e consequentemente,* $y = 7,5$ *fornecem o maior valor do produto* p.

Como vimos nos exemplos anteriores, cada solução segue uma linha particular de operações, entretanto vamos colocar alguns passos comuns que podem ser seguidos nos diversos problemas de soluções extremadas:

$\cdot P_1$– Desenhar uma figura quando for apropriado;

$\cdot P_2$– Denotar por uma letra cada quantidade relacionada no problema, fazendo distinção entre constantes e variáveis;

$\cdot P_3$– Selecionar a variável que deve ser extremada (máximo ou mínimo) e expressá-la em termos das outras variáveis por meio de uma equação - o modelo;

$\cdot P_4$– Usar as informações adicionais para simplificar o modelo, deixando somente uma variável independente na equação;

$\cdot P_5$– Usar os métodos para obtenção de máximos e mínimos de funções.

Exercício 19. *1) Encontrar as dimensões de um retângulo de área máxima que pode ser inscrito num círculo de raio R.*

2) A diferença entre um número e o quadrado de outro é 16. *Determine estes números de modo que o quociente entre o primeiro número e o segundo seja o maior possível.*

3) Encontre as coordenadas dos pontos sobre a curva $y^2 = x + 1$ *que estão mais próximos da origem* $(0,0)$.

4) Encontre as dimensões de um cilindro regular de volume máximo que pode ser inscrito em uma esfera de raio R.

5) Deve-se construir uma praça com a forma de um retângulo tendo em dois lados opostos regiões semicirculares. Determine as dimensões da praça de modo que a área da parte rtetangular seja máxima. O perímetro da praça é de 1000 *metros.*

6) O mesmo problema anterior trocando-se retângulo por triângulo equilátero e considerando-se regiões semicirculares nos 3 lados do triângulo.

7) Seja $h(x) = f(x).g(x)$, *com* f *e* g *diferenciáveis até ordem 2 com derivadas contínuas. Se* $f(x) > 0$ *e* $g(x) > 0$ *para todo* x, *verifique a veracidade das seguintes afirmações:*

(a) Se f *e* g *têm ambas máximo local (ou relativo) em* x_0, *então* h *também tem máximo local em* x_0;

(b) Se f *e* g *têm ambas mínimo local (ou relativo) em* x_0, *então* h *também tem mínimo local em* x_0;

(c) Se h *tem ponto de inflexão em* x_0, *então* f *e* g *têm ponto de inflexão em* x_0.*(e a recíproca vale?).*

Exercício 20. *8) Analise a mesma questão anterior quando* $h(x) = f(x) + g(x)$.

Traçado de curvas

Quando se faz o esboço de uma curva, dada por uma equação $y = f(x)$, preocupando-se com todos seus detalhes, é necessário lançar mão de vários conceitos importantes do Cálculo. Por este motivo é que colocamos o estudo de uma função e o traçado de sua curva no final deste capítulo. Com a resolução de alguns exemplos podemos inferir um roteiro geral para se efetuar este estudo.

Exemplo 53. *1. Estudar a função e esboçar seu gráfico*

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4 \ \ com\ x \in [-3, 3].$$

Solução: O estudo de uma função é composto de algumas etapas -
Características gerais:
f é uma função algébrica polinomial (polinômio do 4º grau), definida no intervalo fechado $[-3, 3]$, isto é,

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leqslant x \leqslant 3\} = [-3, 3].$$

f é contínua e tem derivada contínua, de qualquer ordem, em seu domínio pois é um polinômio.
f é uma função par pois $f(-x) = (-x)^4 - 5(-x)^2 + 4 = f(x)$ e portanto, f é simétrica em relação ao eixo-y.
(b) ***Raízes e sinal de f:***

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Para resolver esta equação biquadrada fazemos a mudança de variáveis $x^2 = z$ e resolvemos a equação

$$z^2 - 5z + 4 = 0 \Longrightarrow z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \Longleftrightarrow \begin{cases} z = 4 \\ z = 1 \end{cases}$$

Para $z = 4 \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$ *e para* $z = 1 \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$. *Assim,* $x = 2; -2; 1$ *e* -1 *são as raízes da função* $f(x)$.

$$f(x) > 0 \ \ se\ \ x < -2 \ \ ou\ x > 2 \ \ ou\ \ -1 < x < 1 \ \ (verifique)$$
$$f(x) < 0 \ \ se\ \ -2 < x < -1 \ \ ou\ 1 < x < 2$$

(c) ***Derivada primeira: Crescimento e pontos críticos:***

$$f'(x) = 4x^3 - 10x = x(4x^2 - 10)$$

Os pontos críticos são obtidos considerando $f(x) = 0$:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x(4x^2 - 10) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{\frac{5}{2}} \\ x = \sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$$

Os sinais da derivada indicam o crescimento (derivada positiva) ou decrescimento (derivada negativa):

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x > 0 \;\; e\; (4x^2 - 10) > 0 \Longleftrightarrow x > 0 \;\; e \;\; \left[-\sqrt{\frac{5}{2}} > x \; ou \; x > \sqrt{\frac{5}{2}}\right] \Longrightarrow x > \sqrt{\frac{5}{2}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ou \\ x < 0 \;\; e\; (4x^2 - 10) < 0 \Longleftrightarrow x < 0 \;\; e \;\; -\sqrt{\frac{5}{2}} < x < \sqrt{\frac{5}{2}} \Longrightarrow -\sqrt{\frac{5}{2}} < x < 0 \end{cases}$$

Logo, f é crescente se $-\sqrt{\frac{5}{2}} < x < 0$ ou $\sqrt{\frac{5}{2}} < x \leqslant 3$.

$$f'(x) < 0 \Longleftrightarrow -3 \leqslant x < -\sqrt{\frac{5}{2}} \;\; ou \;\; 0 < x < \sqrt{\frac{5}{2}}$$

isto é, nestes intervalos a função é decrescente.

(d) ***Derivada segunda - Concavidade, maximo, mínimo e inflexão:***

$$f''(x) = 12x^2 - 10$$

Consideremos os pontos críticos $x = 0, -\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}$ e vamos usar o critério da derivada segunda para determinação das características de tais pontos.

$f''(0) = -10 < 0 \Longrightarrow f$ *tem máximo relativo no ponto x=0;*

$f''(-\sqrt{\frac{5}{2}}) = f''(\sqrt{\frac{5}{2}}) = 20 > 0 \Longrightarrow f$ *tem mínimo relativo nos pontos* $x = -\sqrt{\frac{5}{2}}$ *e* $x = \sqrt{\frac{5}{2}}$

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow 12x^2 - 10 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = \frac{5}{6} \Longrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{5}{6}} \\ x = -\sqrt{\frac{5}{6}} \end{cases} \in [-3, 3]$$

Temos que $f'(\sqrt{\frac{5}{6}}) \neq 0$ *e* $f'(-\sqrt{\frac{5}{6}}) \neq 0$ *e, portanto, f tem pontos de inflexões em* $x = -\sqrt{\frac{5}{6}}$ *e* $x = \sqrt{\frac{5}{6}}$.

$$f''(x) > 0 \ \ se \ \ -3 \leqq x < -\sqrt{\frac{5}{6}} \ \ ou \ \sqrt{\frac{5}{6}} < x \leqslant 3 \Longrightarrow$$

f *tem a concavidade voltada para cima nestes intervalos.*

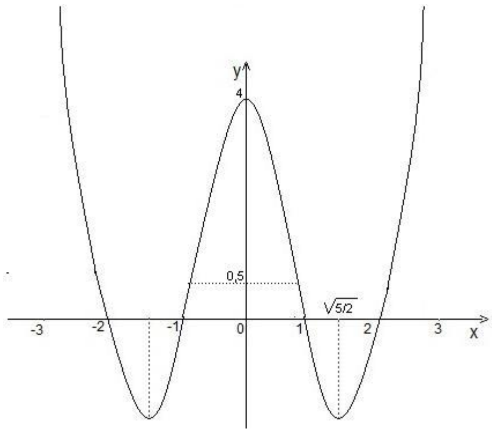
$f''(x) < 0$ *se* $-\sqrt{\frac{5}{6}} < x < \sqrt{\frac{5}{6}} \Longrightarrow f$ *tem a concavidade voltada para baixo neste intervalo.*

(e) Alguns valores especiais de f:

$f(0) = 4; \quad f(-3) = f(3) = 40$

$f(-\sqrt{\frac{5}{2}}) = f(\sqrt{\frac{5}{2}}) = -\frac{9}{4} = -2,25$ *e* $f(-\sqrt{\frac{5}{6}}) = f(\sqrt{\frac{5}{6}}) = \frac{1}{2}$

(f) ***Gráfico de f:***



$fig.5.15$ – *Gráfico da função polinomial de quarto grau*

Exemplo 54. *2. Estudar a função*

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$$

(a) ***Características gerais:***

f é uma função algébrica racional e definida para todo $\mathbb{R}$ *pois* $x^2 + 1 > 0$*, ou seja,* $Dom(f) = \mathbb{R}$.

f é contínua com derivada contínua, de qualquer ordem, para todo x∈ ℝ.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 4}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1} = f(x) \Longrightarrow f \text{ é par}$$

e, portanto f é simétrica em relação ao eixo-y.

(b) ***Raízes e sinal de f:***

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1} \Longleftrightarrow x^2 - 4 \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \text{ são as raízes de } f;$$

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x^2 - 4 > 0 \Longleftrightarrow x < -2 \;\; ou \;\; x > 2.$$
$$f(x) < 0 \Longleftrightarrow x^2 - 4 < 0 \Longleftrightarrow -2 < x < 2$$

(c) ***Derivada primeira:***

$$f'(x) = \frac{\left(x^2 + 1\right)2x - \left(x^2 - 4\right)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{10x}{(x^2 + 1)^2}$$

x é um ponto crítico de f se $f'(x) = 0$,

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{10x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

f é crescente se $f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x > 0$;

f é decrescente se $f'(x) < 0 \Longleftrightarrow x < 0$.

(d) ***Derivada segunda:***

$$f''(x) = \frac{-30x^4 - 20x^2 + 10}{(x^2 + 1)^4}$$

No ponto críticox $= 0$ temos $f''(0) = 10 > 0 \Longrightarrow f$ tem um mínimo local em $x = 0$.

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow -3x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \\ x = \pm\sqrt{-1} \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

Do fato que $f'(\frac{1}{\sqrt{3}}) \neq 0$ *e* $f'(-\frac{1}{\sqrt{3}}) \neq 0$ *segue-se que f tem pontos de inflexão em* $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$f''(x) < 0 \Longleftrightarrow -3x^4 - 2x^2 + 1 > 0 \Longrightarrow x < -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ou } x > \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ (verifique)}$$

Portanto, f tem concavidade voltada para baixo se $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ *ou* $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

f tem concavidade voltada para cima se $f''(x) > 0$,

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(e) ***Assíntotas:***

Como a função é par devemos ter $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ *(se existir!)*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4}{x^2+1} = 1$$

Logo, $y = 1$ *é uma assíntota horizontal de f. Ainda, f não tem assíntota vertical e nem inclinadas (porque?)*

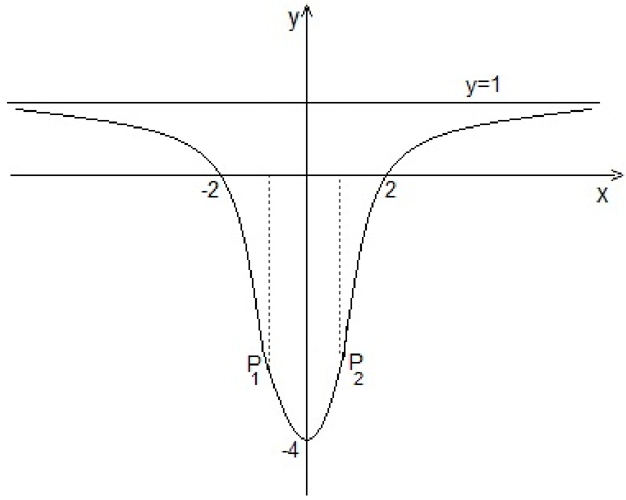
(f) ***Valores especiais de f:***

A curva definida por f corta o eixo-y quando $x = 0$, *isto é,* $f(0) = -4$. *Ainda,* $P = (0,4)$ *é o ponto onde f assume seu valor mínimo.*

$f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 4}{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = -\frac{11}{4} = -2,75;$

$P_1 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{11}{4})$ *e* $P_2 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{11}{4})$ *são os pontos de inflexão de f.*

(g) ***Gráfico da função:***



$fig.5.16 -$ *Gráfico da função racional com assíntota horizontal*

Exemplo 55. *3. Estudar a função*

$$f(x) = x + 2x^{\frac{2}{3}} = x + 2\sqrt[3]{x^2}$$

(a) **Características gerais:**

Exemplo 56. *f é uma função algébrica irracional e definida para todo* $\mathbb{R}$ *ou seja,*

$$Dom(f) = \mathbb{R}.$$

f é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$. *(Verifique a continuidade de f no ponto* $x = 0$*).*

$$f(-x) = x + 2\sqrt[3]{x^2} \neq x + 2\sqrt[3]{x^2} = f(x)$$
$$-f(x) = -x - 2\sqrt[3]{x^2} \neq x + 2\sqrt[3]{x^2} = f(-x)$$

Logo, f não é simétrica em relação ao eixo-x e em relação à origem.

(b) ***Raízes e sinal de f:***

$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -8 \end{cases}$ *são as raízes de f;*

$f(x) > 0$ *se* $-8 < x < 0$ *ou* $x > 0$;

$f(x) < 0$ *se* $x < -8$.

(c) ***Derivada primeira:***

$$f'(x) = 1 + 2.\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 1 + \frac{4}{3\sqrt[3]{x}}$$

$f'(x)$ não é definida para $x = 0$, e portanto, f não é diferenciável no ponto $x = 0$.

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 1 + \frac{4}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Longleftrightarrow \sqrt[3]{x} = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{64}{27} \approx -2,37$$

Assim, $x = -\frac{64}{27}$ é um ponto crítico de f.

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow 1 + \frac{4}{3\sqrt[3]{x}} > 0 \Longleftrightarrow x < -\frac{64}{27}$$

ou seja, f é crescente no intervalo $\left(-\infty, -\frac{64}{27}\right)$.

Do fato de f' não existir no ponto x=0, devemos analisar o sinal de f' numa vizinhança deste ponto;

Para $x > 0$, temos $f'(x) = 1 + \frac{4}{3\sqrt[3]{x}} > 0$, ou seja, f é crescente para $x > 0$;

Para $-\frac{64}{27} < x < 0$, temos que $f'(x) < 0$, ou seja, f é decrescente.

Podemos já concluir que f tem um mínimo local no ponto $x = 0$ (porque?).

(d) ***Derivada segunda:***

$$f''(x) = -\frac{4}{9}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{4}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} \quad com\ x \neq 0$$

Temos que $f''(x) < 0$ para todo $x \neq 0 \Longrightarrow f''(-\frac{64}{27}) < 0$, portanto, $x = -\frac{64}{27}$ é um ponto de máximo local para f.

Ainda, do fato de $f''(x) < 0$ para todo $x \neq 0$, então $f(x)$ tem a concavidade voltada para baixo para todo $x \neq 0$.

(e) ***Assíntotas:***

Temos que

$$\lim_{x\to+\infty}(x + 2\sqrt[3]{x^2}) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}(x + 2\sqrt[3]{x^2}) = \lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^2}\left(\frac{x}{x^{\frac{2}{3}}} + 2\right) = \lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x} + 2\right) = -\infty$$

Se existir assíntota inclinada, será uma reta $y = ax+b$ onde, a e b são constantes dadas por:

$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + 2x^{-\frac{1}{3}}\right) = 1 + \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt[3]{x}} = 1;$

$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty} 2x^{\frac{2}{3}} = 2\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty.$

O mesmo cálculo, feito para $x \to -\infty$, mostra que não há assíntota inclinada para f.

(f) ***Valores especiais de f:***

$f(0) = 0$ *e* $y = 0$ *se* $x + 2\sqrt[3]{x^2} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -8 \end{cases}$ *(raízes de f);*

$f(-\frac{64}{27}) = \frac{32}{27} \approx 1,18;$ $f(1) = 4$ *e* $f(8) = 16.$

(g) ***Gráfico de f:***

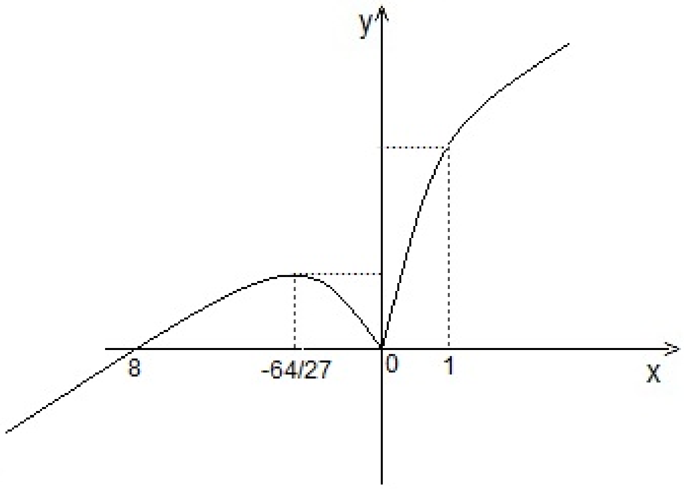


fig.5.17-Gráfico da função irracional

Exercício 21. *Estude as seguintes funções*

1) $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$ *ou* $f(x) = \frac{|x^2-1|}{x-1}$ *(prova UEC, 1971);*

2) $f(x) = \sin x - \cos\frac{x}{2}$;

3) $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$;

4) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x+1}}$ *(UnB, 1969);*

5) $f(x) = \frac{tgx}{1-\cos x}$;

(6) $f(x) = \begin{cases} 2x \ \ se \ \ x < -3 \\ |x| \ \ se \ \ -3 \leqslant x < 0 \\ x^2 \ \ se \ \ 0 \leqslant x < 2 \\ \frac{1}{x} + \frac{7}{2} \ \ se \ \ x \geqslant 2 \end{cases}$

Exercício 22. *Mostre que o gráfico de* $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$ *é dado pela* $fig.5.18$

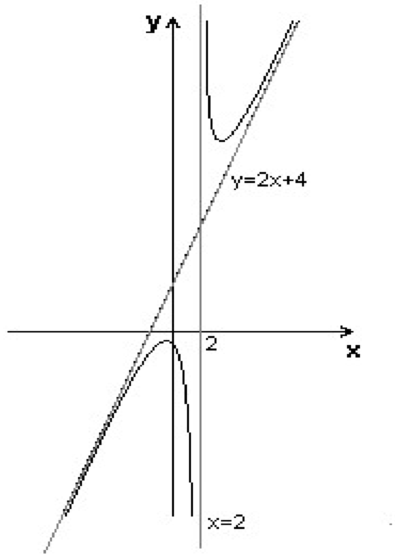
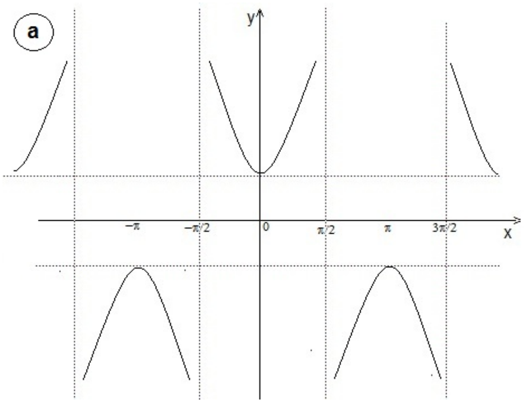
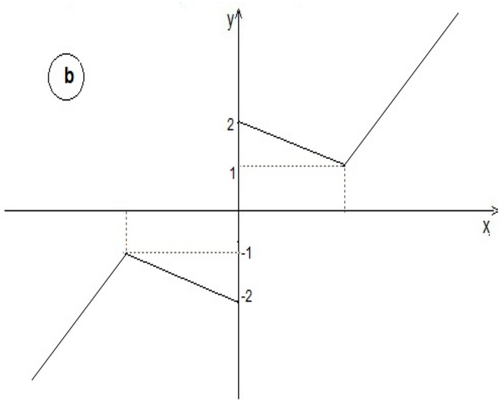


fig.5.18-Assíntota inclinada

Exercício 23. *Mostre que a equação* $x^5 - 5x + 3 = 0$ *tem somente 3 raízes reais.*

Exercício 24. *Dados os esboços das funções que seguem, discriminar suas propriedades principais (domínio, imagem, simetria, continuidade, pontos críticos, regiões de crescimento, assíntotas, periodicidade etc):*





$fig.5.19$ $fig.5.20$

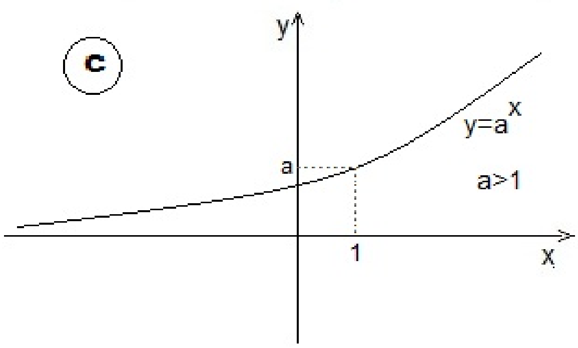


fig.5.21

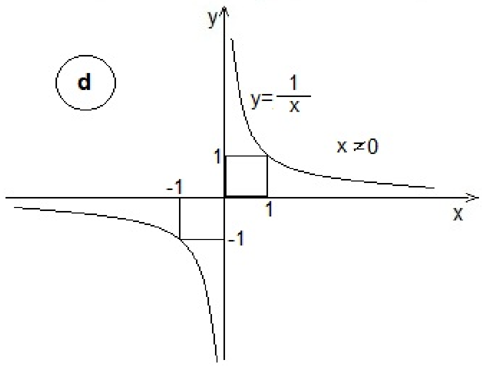


fig.5.22

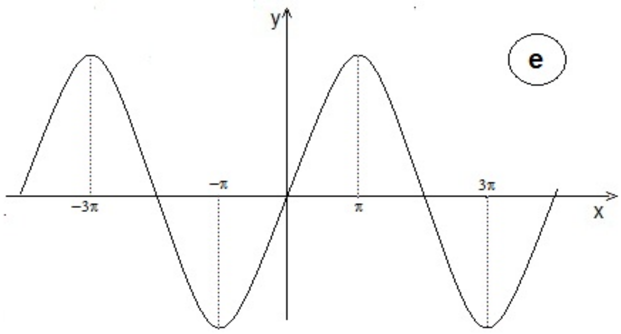


fig.5.23

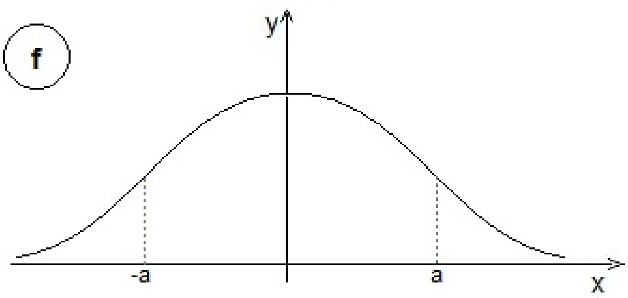


fig.5.24

6 Integral

Canteiros de Machu Picchu

"Um modelo matemático nunca encerra uma verdade definitiva, pois é sempre uma aproximação da realidade analisada e, portanto, sujeito a mudanças - este processo dinâmico de busca de modelos adequados, é o que se convencionou chamar de modelagem matemática".

in ensino-aprendizagem com modelagem matemática

Vamos apresentar os conceitos de *integral indefinida* ou antiderivada e de *integral definida*. Veremos que tais conceitos, definidos de maneiras bem distintas, estão relacionados por meio do **Teorema Fundamental do Cálculo.**

Não daremos muita ênfase aos métodos de integração, entretanto alguns deles serão destacados nas aplicações que faremos. Os distintos métodos de integração podem ser encontrados em qualquer livro de Cálculo e fica como exercício para os alunos interessados.

6.1 Integral Indefinida

Consideremos o seguinte problema: *Encontrar uma função $y = f(x)$ derivável num intervalo (a,b) e cuja derivada $y' = \frac{dy}{dx}$ é uma função conhecida, em outras palavras devemos encontrar $y = f(x)$ tal que $\frac{dy}{dx} = F(x)$ com $a < x < b$.*

Uma solução deste problema, se existir, é chamada *integral indefinida ou antiderivada* da função $F(x)$.

Exemplo 57. *Achar $y = f(x)$ tal que $\frac{dy}{dx} = 2x$, $x \in \mathbb{R}$.*

Solução: Do estudo das derivadas, sabemos que se $y = x^2$ então, $\frac{dy}{dx} = 2x$, de modo que a função $y = x^2$ é uma solução do problema. Então, dizemos que $y = x^2$ é uma integral indefinida da função $F(x) = 2x$. É claro que tal solução não é única pois as funções $y = x^2 + C$, sendo C uma constante arbitrária, também satisfazem a condição $\frac{dy}{dx} = 2x$.

As soluções deste tipo de problema nem sempre se apresentam sob uma forma simples como do exemplo anterior e, podem mesmo, nem existir. A seguinte Proposição indica uma maneira de se encontrar a forma geral de uma integral indefinida:

Proposição 18. *Se $y = f(x)$ é uma integral indefinida de $F(x)$ então, toda integral indefinida de $F(x)$ é da forma $y = f(x) + C$, onde C é uma constante.*

Demonstração. Seja $y = \varphi(x)$ uma integral indefinida de $F(x)$, isto é, $\frac{d\varphi}{dx} = F(x)$.

Logo,

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{df}{dx} \Longleftrightarrow \frac{d}{dx}(\varphi(x) - f(x)) = 0 \Longleftrightarrow \varphi(x) - f(x) = C.$$

Portanto, $\varphi(x) = f(x) + C$. $\square$

A Proposição anterior nos permite afirmar que, para calcular todas as integrais indefinidas de uma função $F(x)$, basta calcular uma delas e todas as demais são obtidas acrescentando-se uma constante arbitrária.

Para significar que $y = f(x) + C$ representa todas as integrais indefinidas de $F(x)$, escrevemos

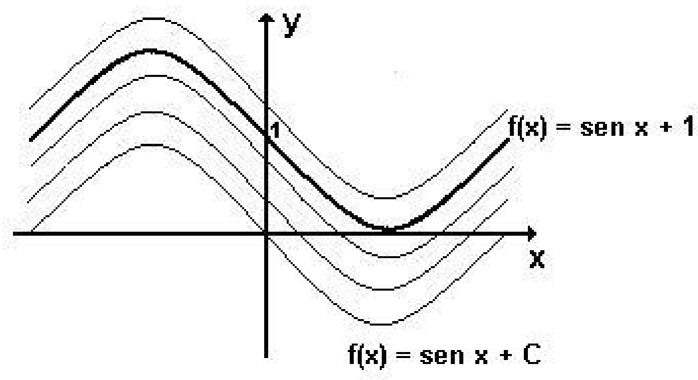
$$\int F(x)dx = f(x) + C$$

que deve ser lido: *a integral indefinida de F(x), em relação a x, é igual a f(x) mais constante.*

O processo para encontrar as soluções de uma integral indefinida é denominado resolução de uma *equação diferencial* $\frac{dy}{dx} = F(x)$, isto é,

$$\frac{dy}{dx} = F(x) \Longleftrightarrow dy = F(x)dx \Longleftrightarrow \int F(x)dx = y + C \tag{6.1.1}$$

A solução de uma integral indefinida é uma família infinita de curvas que satisfazem *6.1.1.* Cada constante C determina uma solução particular (veja Fig.6.1)



$fig.6.1$ – Solução da integral indefinida de cos x

Exemplo 58. *(1)* $\int 2xdx = x^2 + C$ *pois* $\frac{d}{dx}\left(x^2 + C\right) = 2x$;

(2) $\int x^3dx = \frac{x^4}{4} + C$ *pois* $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4} + C\right) = x^3$;

(3) Se $n \neq -1$, *então* $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ *pois* $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right) = x^n$. *Observamos que* $n \neq -1$ *para evitar que o denominador se anule.*

(4) $\int senxdx = \cos x + C$ *pois* $\frac{d}{dx}(\cos x + C) = senx$.

6.1.1 Propriedades da integral indefinida

As integrais indefinidas apresentam algumas propriedades que são consequências imediatas de propriedades análogas das derivadas, uma delas é a linearidade, isto é:

· (1)

$$\int (F(x) \pm G(x))\,dx = \int F(x)dx \pm \int G(x)dx;$$

· (2)

$$\int kF(x)dx = k\int F(x)dx,\ k \text{ constante.}$$

De 6.1.1 podemos inferir que:

· (3)

$$\int \left[\frac{d}{dx}F(x)\right]dx = F(x) + C$$

Com base na definição e propriedades da integral indefinida, resolveremos alguns exemplos típicos:

Exemplo 59. *1. Calcule as seguintes integrais indefinidas:*

(a) $\int 2x+3)dx$

Solução: $\int 2x+3)dx = \int 2xdx + \int 3dx = 2\int xdx + 3\int 1dx = 2\frac{x^2}{2} + C_1 + 3x + C_2 = \frac{x^2}{2} + 3x + C;$

(b) $\int (3x-1)^2\,dx$

Solução: Vamos resolver esta integral, usando dois métodos distintos:

· *diretamente:* $\int (3x-1)^2\,dx = \int \left(9x^2 - 6x + 1\right)dx = \int 9x^2dx - \int 6xdx + \int dx = 3x^3 - 3x^2 + x + C;$

· *Usando uma mudança de variáveis:* $3x - 1 = z \Longrightarrow dx = \frac{1}{3}dz,$

$\int (3x-1)^2\,dx = \frac{1}{3}\int z^2dz = \frac{1}{9}z^3 + C = \frac{1}{9}(3x-1)^3 + C = 3x^3 - 3x^2 + x + C.$

(c) $\int x^2\left(1+2x^3\right)^{-\frac{2}{3}}dx$

Solução: Consideremos a seguinte mudança de variáveis $z = 1 + 2x^3 \Longrightarrow dz = 6x^2dx \Longrightarrow x^2dx = \frac{1}{6}dz$*, então*

$\int x^2\left(1+2x^3\right)^{-\frac{2}{3}}dx = \frac{1}{6}\int z^{-\frac{2}{3}}dz = \frac{1}{6}\frac{z^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = \frac{\sqrt[3]{z}}{2} + C = \frac{1}{2}\sqrt[3]{1+2x^3} + C$

Exemplo 60. *2. Se uma função* $F(x)$ *tem derivada igual a* $2x+1$ *e* $F(0) = 1$*, encontre* $F(x)$*.*

Solução: Sabemos que se $\frac{dF}{dx} = 2x + 1$*, então* $\int (2x+1)\,dx = F(x) + C$*, isto é,*

$$F(x) = x^2 + x + C$$

A condição F(0)=1 permite determinar o valor da constante C, ou seja,

$$F(0) = 1 = 0^2 + 0 + C = C.$$

Portanto,

$$F(x) = x^2 + x + 1$$

Uma maneira mais simples de se colocar o problema anterior é o seguinte: Resolver a *equação diferencial com condição inicial*

$$\begin{cases} \frac{dF}{dx} = 2x + 1 \\ F(0) = 1 \end{cases}$$

Problemas deste tipo são denominados de *Problemas de Cauchy.*

Exemplo 61. *3.a) A velocidade de uma partícula em movimento, num instante t, é dada por $v(t) = k.t$, onde k é uma constante. Se no instante $t = 0$ a partícula está na posição s_0, qual a expressão do espaço $s(t)$?*

Solução: Temos que $v(t) = \frac{ds}{dt} = kt \Longrightarrow s(t) = \int kt dt = \frac{k}{2}t^2 + C.$

Usando a condição inicial $s(0) = s_0$, obtemos $C = s_0$. Portanto, $s(t) = \frac{k}{2}t^2 + s_0.$

3.b) Se a aceleração de uma partícula em movimento retilínio, é dada por $a(t) = \left(t^2 + 1\right)^2$ e sabemos que $v(0) = v_0$ e $s(0) = s_0$, encontrar as expressões da velocidade e do espaço percorrido, num instante t.

Solução: Temos que

$$a(t) = \left(t^2 + 1\right)^2 \Longrightarrow v(t) = \int \left(t^2 + 1\right) dt = \int \left(t^4 + 2t^2 + 1\right) dt = \frac{1}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + t + C_1$$

Para $t = 0$, determinamos $C_1 = v_0$;

$$s(t) = \int v(t)dt = \int \left(\frac{1}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + t + v_0\right) dt = \frac{1}{30}t^6 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{2}t^2 + v_0 t + C_2$$

Para $t = 0$, temos $s(0) = s_0 = C_2$.Logo,

$$s(t) = \frac{1}{30}t^6 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{2}t^2 + v_0 t + s_0$$

Exercício 25. *1. Calcule a integral definida das seguintes funções:*

(a) $f(x) = 1 - 4x + 9x^2$;

(b) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$;

(c) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2+2x+2}}$;

(d) $f(x) = (2-3t)^{\frac{2}{3}}$;

Exercício 26. *2. Determine as equações diferenciais com condições iniciais:*

(a) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 4x^2 + 6x - 5 \\ y_0 = 3 \end{cases}$;

(b) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \sqrt{2-x} \\ y_0 = 0 \end{cases}$;

(c) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \cos x \sin x \\ y_0 = 1 \end{cases}$.

Exercício 27. *3. Determine $y = f(x)$, sabendo-se que $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$.*

Sugestão: escreva a equação diferencial na forma diferencial e integre membro - a - membro;

Observação: *A função $y = f(x)$, não identicamente nula, tal que $\frac{dy}{dx} = y$ é denominada* função exponencial *e*

denotada por $f(x) = e^x$.

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \Longleftrightarrow \int e^x dx = e^x + C$$

A inversa $x = f^{-1}(y)$ da função $y = f(x) = e^x$ é definida com a equação diferencial, isto é,

$$\frac{dy}{dx} = y \Longleftrightarrow \frac{1}{y}dy = dx \Longleftrightarrow x = \int \frac{1}{y}dy = \ln y + C$$

Assim,$y = e^x \Longleftrightarrow x = \ln y$

ou

$\ln e^x = x \Leftrightarrow e^{\ln y} = y$

Faremos mais tarde um estudo mais elaborado destas funções que são fundamentais para as aplicações práticas.

6.2 Integral Definida

6.2.1 Área

Seja $f(x)$ uma função contínua e positiva no intervalo $[a, b]$. Vamos denotar por A_a^b a região escurecida da Figura 6.2

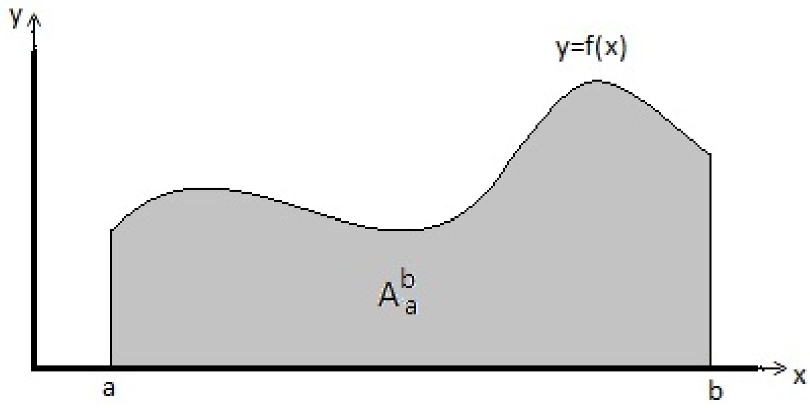


fig.6.2-Região A_a^b

A região A_a^b é uma figura limitada pelo eixo-x, pelas retas $x = a$ e $x = b$ e pelo "gráfico"da função $f(x)$.

Nosso objetivo agora é dar uma definição da *área de* A_a^b, que coincida com a intuição geométrica e que possa ser calculada quando conhecemos a função f. Posteriormente, estenderemos a definição para funções contínuas quaisquer (não necessariamente positiva) e também para uma classe especial de funções descontínuas.

Definição de área de A_a^b :

Vamos dividir o intervalo $[a,b]$ em n partes iguais - O comprimento de cada subintervalo será $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Sejam,

$$x_0 = a; x_1 = a + \Delta x; x_2 = a + 2\Delta x; ..., x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x$$

os extremos esquerdos destes subintervalos.

Através de retas paralelas ao eixo-y, passando pelos pontos $x_0; x_1; x_2; ...; x_{n-1}$, dividese a região A_a^b em subregiões: $A_1, A_2, ..., A_n$ cujas áreas são aproximadas pelas áreas dos retângulos de base Δx e alturas $f(x_0); f(x_1); f(x_2); ...; f(x_{n-1})$, como na Figura 6.3 :

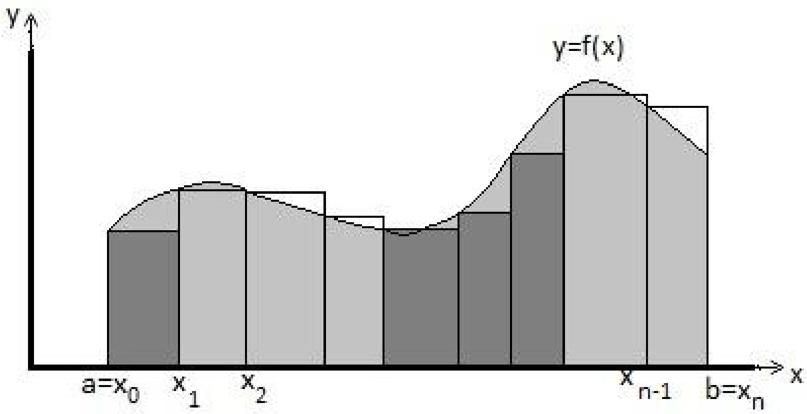


fig.6.3-Partição da região A_a^b em subregiões retangulares

Sejam R_i os retângulos de base Δx e altura $f(x_{i-1})$. Temos que
Área de $R_1 = f(x_0)\Delta x$;
Área de $R_2 = f(x_1)\Delta x$;
Área de $R_3 = f(x_2)\Delta x$;
....
Área de $R_n = f(x_{n-1})\Delta x$.

À medida que o número de subintervalos aumenta, e como consequência, o comprimento de Δx diminui, a aproximação da área $A_{i,}$ $1 \leqq i \leqslant n$, pela área do retângulo R_i correspondente, é cada vez melhor, isto é, $|A_i - f(x_{i-1})\Delta x|$ é cada vez menor. Desta forma, quando "n for suficientemente grande", a diferença entre a área de A_a^b e a soma das áreas dos retângulos R_i será "arbitrariamente pequena". É então razoável colocarmos, por definição:

$$\acute{A}rea \text{ de } A_a^b = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x \tag{6.2.1}$$

Observações:

(a) Na definição de área de A_a^b 6.2.1 poderíamos ter considerado os extremos direitos dos retângulos ou mesmo um ponto qualquer c_i de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ para tomar sua altura $f(c_i)$, sem alterar o resultado;

(b) Se os comprimentos dos subintervalos da partição de $[a, b]$ forem distintos, então devemos substituir a definição 6.2.1 pela seguinte definição mais geral:

$$\acute{A}rea \text{ de } A_a^b = \lim_{|\Delta x_i|\to\ 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i \tag{6.2.2}$$

onde, $|\Delta x_i| = \max|x_i - x_{i-1}|$, $1 \leqq i \leqslant n$. Podemos ver que se $|\Delta x_i| \to 0$ então $n \to +\infty$ mas a recíproca pode não ser verdadeira, isto é, $n \to +\infty \not\Rightarrow |\Delta x_i| \to 0$ (dê um exemplo).

Exemplo 62. *Seja $f(x) = mx$, determinar a área de A_a^b no intervalo $[a, b]$.*

Solução: A região de A_a^b considerada pode ser visualizada na Figura 6.4

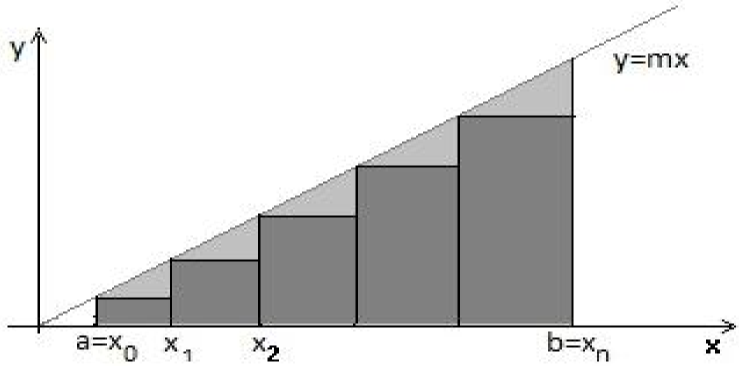


fig.6.4-Região A_a^b determinada pela reta mx

Neste caso, estamos considerando as bases dos retângulos iguais a $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Então,
Área de $R_1 = f(a)\Delta x = ma\Delta x$;
Área de $R_2 = f(x_1)\Delta x = mx_1\Delta x = m(a + \Delta x)\Delta x$;
....
Área de $R_n = f(x_{n-1})\Delta x = mx_{n-1}\Delta x = m[a + (n-1)\Delta x]\Delta x$.
A soma das áreas dos retângulos é

$$\begin{aligned}
S_n &= m\left[a + (a + \Delta x) + \ldots + (a + (n-1)\Delta x)\right] \\
&= m\left[na + (1 + 2 + 3 + \ldots + n)\Delta x\right]\Delta x \\
&= m\left[na + \frac{n(n-1)}{2}\Delta x\right]\Delta x \\
&= mn\left[a + \frac{(n-1)}{2}\frac{(b-a)}{n}\right]\frac{(b-a)}{n} \\
&= m\left[a + \frac{(n-1)}{n}\frac{(b-a)}{2}\right](b-a)
\end{aligned}$$

Agora se considerarmos a definição 6.2.1, para obter a área de A_a^b basta calcular o limite:

$$A_a^b = \lim_{n\to+\infty} S_n = m(b-a)\left[a + \frac{(b-a)}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{(n-1)}{n}\right]$$

ou seja,

$$\text{área de } A_a^b = m(b-a)\left[a + \frac{(b-a)}{2}\right] = m(b-a)\frac{a+b}{2}$$
$$= \frac{1}{2}(ma+mb)(b-a)$$

que é a fórmula da área do trapézio conhecida.

Exemplo 63. *2. Calcular a área de A_0^1 quando $y = f(x) = x^2$.*
Solução: Temos que $\Delta x = \frac{1}{n}; x_0 = 0; x_1 = \frac{1}{n}; x_2 = \frac{2}{}; ...; x_{n-1} = \frac{n-1}{n}$.

$$\begin{aligned}
\text{Área de } A_0^1 &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[f(0)\Delta x + f(\frac{1}{n})\Delta x + f(\frac{2}{n})\Delta x + ... + f(\frac{n-1}{n})\Delta x\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[0 + \frac{1}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + ... + (\frac{n-1}{n})^2\right]\frac{1}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2\right]\frac{1}{n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1).n.(2n-1)}{6}.\frac{1}{n^3} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Extensão da definição de área sob uma curva

Exemplo 64. *Nas definições 6.2.1 e 6.2.2 consideramos que a função $y = f(x)$ é contínua e positiva em $[a,b]$. Como consequência o valor da área de A_a^b é também um número positivo. Suponhamos agora que f é negativa em $[a,b]$. Neste caso, a área de A_a^b é definida por*

$$\text{área de } A_a^b = -\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)\Delta x \tag{6.2.3}$$

onde, $g(x) = -f(x)$.

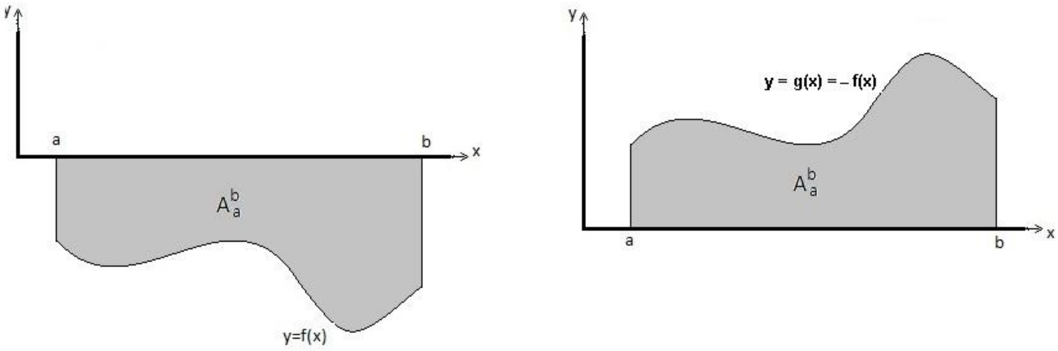


fig.6.5-Área de uma função negativa

Decorre da definição 6.2.3 que a área da região limitada pelas retas $y = x$; $x = a$; $x = b$ e pelo gráfico da função negativa f em $[a, b]$, é também um número positivo.

Seja f é uma função contínua em $[a, b]$, a função módulo de f : $|f|$, *definida por*

$$|f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & se \ \ f(x) \geqslant 0 \\ -f(x) & se \ \ f(x) < 0 \end{cases}$$

é sempre positiva ou nula em $[a, b]$.

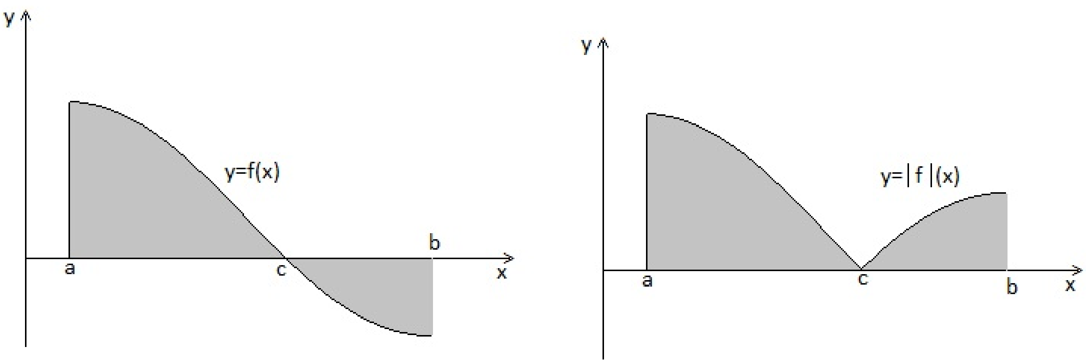


fig.6.6-Gráficos das funções f e $|f|$

A definição de área de A_a^b para uma função contínua em $[a, b]$ é dada por:

$$\text{\textit{Área de} } A_a^b = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} |f(x_i)| \Delta x = \lim_{|\Delta x_i|\to 0} \sum_{i=1}^{n-1} |f(x_i)| \Delta x_i$$

Esta definição generaliza as anteriores e nos permite concluir que área de $A_a^b \geqslant 0$ e $A_a^b = 0 \Longleftrightarrow f(x)$ é identicamente nula ou $a = b$.

Observação: *Podemos finalmente estender a definição de área de A_a^b para funções limitadas em $[a,b]$ e que apresentam um número* ***finito*** *de pontos de descontinuidade neste intervalo.*

Sejam $b_1, b_2, ..., b_k$ pontos de descontinuidade de f em $[a,b]$. Neste caso, consideramos $A_a^b = A_a^{b_1} + A_{b_1}^{b_2} + ... + A_{b_{n-1}}^{b_n} + A_{b_n}^{b}$ de modo que f é contínua em cada subintervalo que define as regiões $A_a^{b_1}$; $A_{b_{i-1}}^{bi}$ ou $A_{b_n}^{b}$.

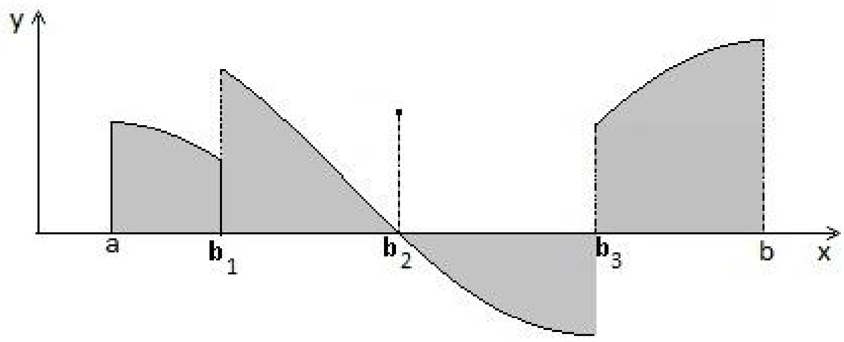


fig.6.7-Região limitada por uma curva descontínua em um número finito de pontos

Definição de Integral Definida

Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo fechado $[a,b]$. Consideremos uma partição de $[a,b]$ em n subintervalos de mesmo comprimento, por meio dos pontos ordenados:

$$a = x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = b$$

Temos que $|x_{i+1} - x_i| = \Delta x = \frac{b-a}{n}$ para todo i, com $0 \leqslant i \leqslant n-1$.

Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$, a soma

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x$$

Definimos a *integral definida* de f em $[a,b]$, e denotamos por $\int_a^b f(x)dx$ o seguinte limite:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x \qquad (6.2.4)$$

Observações:

∘ Na definição 6.2.4 tomamos os extremos esquerdos x_i de cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ em que foi dividido $[a,b]$. Pode-se demonstrar que o limite que define a integral definida 6.2.4 tem o mesmo valor se tomarmos um ponto qualquer $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$;

∘ Os comprimentos dos subintervalos da partição de $[a,b]$ podem ser distintos, desde que $n \to \infty \Longleftrightarrow \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} |x_{i+1} - x_i| \to 0$;

∘ A definição continua válida desde que $f(x)$ seja limitada e tenha apenas um número finito de descontinuidade em$[a,b]$.

Assim, a definição mais geral para integral definida é dada por

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)\Delta x_i \tag{6.2.5}$$

com, $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$; $n \to \infty \Longleftrightarrow \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} |x_{i+1} - x_i| \to 0$ e tal que $f(x)$ seja limitada e tenha apenas um número finito de descontinuidade em$[a,b]$.

∘ Se $a \geqslant b$, definimos

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Interpretação geométrica da integral definida

a) Se f é positiva em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = \text{área de } A_a^b$$

b) Se f é negativa em $[a,b]$, tem-se

$$\int_a^b f(x)dx = -\text{área de } A_a^b$$

c) Se f muda de sinal em $[a,b]$, tal que $f \geqslant 0$ em $[c,d]$ e, portanto $f < 0$ em $[a,b] - [c,d]$;

$$\int_a^b f(x)dx = \text{área de } A_c^d - \text{área da região onde } f < 0$$

Exemplo 65. *Calcular* $\int\limits_{0}^{2\pi} \sin x dx$.

Solução: Temos que senx $\geqslant 0$ *em* $[0, 2\pi]$ *se* $x \in [0, \pi]$ *e senx* < 0 *se* $x \in (\pi, 2\pi]$. *Então*

$$\int\limits_{0}^{2\pi} senx dx = A_0^{\pi} - A_{\pi}^{2\pi} = \int\limits_{0}^{\pi} senx dx - \int\limits_{\pi}^{2\pi} senx dx = 0$$

Propriedades da integral definida

1). $\int\limits_{a}^{a} f(x)dx = 0$;

2). Se $c \in [a,b]$, então $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{b} f(x)dx$;

3). $\int\limits_{a}^{b} [f(x) \pm g(x)]dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx + \int\limits_{a}^{b} g(x)dx$;

4). $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = -\int\limits_{b}^{a} f(x)dx$;

5). Se $|f(x)| \leqq M$ em $[a,b] \Longrightarrow \left|\int\limits_{a}^{b} f(x)dx\right| \leqslant M(b-a)$.

Teorema Fundamental do Cálculo

Para Calcular uma integral definida, usando a definição 6.2.4 ou a definição mais geral 6.2.5, devemos calcular um limite que, em geral, não é muito simples. O teorema seguinte permite contornar esta dificuldade, além de estabelecer uma relação entre os conceitos de integral indefinida e integral definida. Devido à sua importância é frequentemente tratado como *Teorema Fundamental do Cálculo Integral:*

Teorema 25. *Seja* $y = f(x)$ *uma função contínua no intervalo* $[a,b]$ *e seja* $F(x)$ *uma integral indefinida de* $f(x)$, *então*

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)]_a^b$$

Este teorema, cuja demonstração omitiremos, permite calcular a integral definida de uma função $f(x)$ (ou área da região limitada por $f(x)$) a partir da integral indefinida de $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x).$$

Exemplo 66. *1) Calcular a integral definida* $\int_1^3 x^2 dx$.

Solução: Determinamos inicialmente a integral indefinida

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

e aplicamos o Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\begin{aligned}\int_1^3 x^2 dx &= \frac{x^3}{3} + C\Big]_1^3 = F(3) - F(1)\\ &= \left(\frac{3^3}{3} + C\right) - \left(\frac{1^3}{3} + C\right) = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}\end{aligned}$$

2) Calcular a área de A_a^b *para* $y = x^2$ *no intervalo* $[a,b]$.

Solução: Como $y \geqslant 0$ *em* $[a,b]$, *segue que área de* $A_a^b = \int_a^b x^2 dx = F(b) - F(a) = \frac{1}{3}\left(b^3 - a^3\right)$.

Exemplo 67. *Calcule o limite*

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + ... + \sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}$$

Solução: Tomando $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$ *e usando a definição 6.2.4, obtemos*

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{x}dx &= \lim_{n\to+\infty}\left[f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + ... + f(\frac{n-1}{n}) + f(\frac{n}{n})\right]\Delta x\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left[\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + ... + \sqrt{\frac{n-1}{n}} + \sqrt{\frac{n}{n}}\right].\frac{1}{n}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + ... + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}\right]\end{aligned}$$

De modo que

$$L = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Exemplo 68. *Calcule a área de A_0^4 quando $f(x) = x^3 - 4x$.*

Solução: Temos que $f(x) = x(x^2-4) = x(x-2)(x+2) \Longrightarrow$

$$f(x) < 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x > 0 \ e \ (x^2-4) < 0 \Longrightarrow x > 0 \ \ e \ -2 < x < 2 \Longleftrightarrow 0 < x < 2 \\ x < 0 \ e \ (x^2-4) > 0 \Longrightarrow x < 0 \ \ e \begin{cases} x < -2 \\ ou \\ x > 2 \end{cases} \Longleftrightarrow x < -2 \end{cases}$$

Logo, para $x \in [0,4]$*, tem-se* $\begin{cases} f(x) \leqslant 0 \ \ se \ \ 0 \leqslant x < 2 \\ f(x) > 0 \ \ se \ \ 2 < x \leqslant 4 \end{cases} \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} A_0^4 &= -\int_0^2 \left(x^3 - 4x\right) dx + . \int_2^4 \left(x^3 - 4x\right) dx \\ &= -\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right)\Bigg]_0^2 + \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right)\Bigg]_2^4 = -[(4-8)-0] + [(64-32)-(4-8)] = 40 \end{aligned}$$

6.2.2 A função logarítmo natural*

Consideremos a função $f(t) = \frac{1}{t}$ para $t > 0$. Temos que f é contínua e derivável em todo seu domínio $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$.

Seja A_1^x a região limitada por $f(t) = \frac{1}{t}$, então

$$\text{área de } A_1^x = \int_1^x \frac{1}{t} dt = |F(x) - F(1)| = |F(x)| \quad \text{para } x > 0.$$

Lembrando que $A_1^1 = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0$ e que $\int_1^x \frac{1}{t} dt = -\int_x^1 \frac{1}{t} dt$ se $0 < x < 1$.

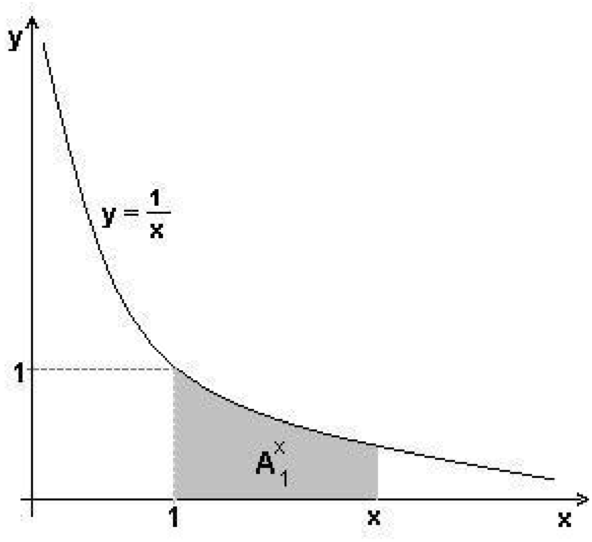


fig.6.8-Definição de logarítmo natural para x maior que 1.

Definição 16. *Definimos a função logarítmo natural de x, e denotamos por* $y = \ln x$, *como sendo o valor da área de* A_1^x *se* $x \geqslant 1$ *e* $-(\text{área de } A_x^1)$ *se* $x < 1$, *ou seja,*

$$\ln x = \begin{cases} \int_1^x \frac{1}{t} dt & se\ x \geqslant 1 \\ -\int_x^1 \frac{1}{t} dt & se\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

Como consequência desta definição temos

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

Propriedades da função logarítimo: $y = \ln x$:

P_1 . $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ e $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$;
De fato, sejam $x = \ln a$ e $y = \ln b \Longleftrightarrow a = e^x$ e $b = e^y \Longrightarrow ab = e^x.e^y$.Logo,

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad \Longleftrightarrow e^x.e^y = e^{x+y}$$

Analogamente,

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \Longleftrightarrow \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$

P_2.A função $y = F(x) = \ln x$ é definida no intervalo $(0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}^+$; F é contínua em todo seu domínio e $\begin{cases} \ln x > 0 \text{ se } x > 1 \\ \ln x = 0 \text{ se } x = 1 \\ \ln x < 0 \text{ se } \ 0 > x > 1 \end{cases}$;

P_3 . $F(x)$ é diferenciável em seu domínio e

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} > 0 \ \text{ se } x > 0;$$

Logo, a função é sempre crescente.

P_4 . $y = F(x) = \ln x$ não é limitada e sua imagem é todo $\mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \ \text{ e } \ \lim_{x\to-\infty} \ln x = -\infty$$

Isto segue do fato que, para qualquer n$\in \mathbb{N}$, $\ln n > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$ (verifique).

P_5 . A concavidade da função logarítmo é sempre voltada para baixo pois

$$\frac{d^2}{dx^2}\ln x = -\frac{1}{x^2} < 0 \ \text{ se } x > 0;$$

P_6 . A função logarítmo natural admite uma função inversa com as mesmas qualidades, isto é, a inversa é definida, contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$.Ainda mais, é sempre crescente.

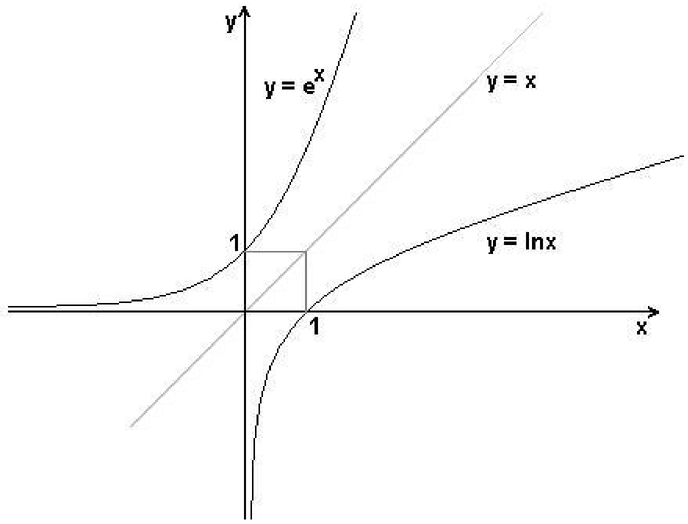


fig.6.9- Gráfico da função logarítmo natural e sua inversa

Seja $x = g(y)$ função inversa de $y = \ln x$, então devemos ter $g(\ln x) = x$ e portanto,

$$\frac{d\,[g(\ln x)]}{dx} = \frac{dg}{dy}\frac{d\ln x}{dx} = 1 \Longleftrightarrow \frac{dg}{dy} = x = g(y)$$

ou seja, a função inversa do logarítmo é igual á sua derivada. Definimos pois $x = g(y) = e^y$:

$$y = \ln x \Longleftrightarrow x = e^y$$

Observação: Se $a > 0$, temos $a^x = e^{x\ln a}$ e definimos $y = log_a x \Longleftrightarrow a^y = x$.

Exemplo 69. *Suponhamos que a velocidade de uma determinada doença, numa cidade, seja proporcional ao número de pessoas sadias em cada instante. Se P_0 é a quantidade de doentes detectados no instante $t = 0$, determine um modelo que possa prever a quantidade de doentes num instante t qualquer.*

Solução: Consideremos a cidade com uma população de K habitantes; O número de sadios, em cada instante será $(K - P)$.

Devemos pois, obter o número de doentes $P = P(t)$, satisfazendo a equação

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = a(K - P)\ ,\ a > 0 \\ P_0 = P(0) \quad dado \end{cases} \tag{6.2.6}$$

Esta equação, na forma diferencial é dada por:

$$\frac{1}{K - P} dP = a dt \tag{6.2.7}$$

Sabemos que duas funções com diferenciais iguais diferem de uma constante. Logo,

$$\int \frac{1}{K - P} dP = \int a dt + C_1 \tag{6.2.8}$$

Para resolver $\int \frac{1}{K-P} dP$ consideramos a mudança de variáveis $z = K - P \Longrightarrow dz = -dP$

$$\int \frac{1}{K - P} dP = -\int \frac{1}{z} dz = -\ln z + C = -\ln(K - P) + C_2$$

Logo, de 6.2.8, obtemos

$$-\ln(K - P) + C_2 = at + C_1 \Longrightarrow \ln(K - z) = -at + C \tag{6.2.9}$$

onde $C = C_2 - C_1$ é uma constante arbitrária, assim como C_1 e C_2.

Agora podemos obter $P(t)$ de 6.2.9, considerando a função exponencial de cada menmbro,

$$e^{\ln(K-P)} = e^{(-at+C)} = e^C.e^{-at}$$

Logo,

$$K - P = e^C.e^{-at} \Longrightarrow P(t) = K - e^C.e^{-at} \tag{6.2.10}$$

Usando a condição inicial $P_0 = P(0)$, obtemos o valor da constante C:

$$P_0 = K - e^C \Longrightarrow e^C = K - P_0$$

portanto,

$$P(t) = K - (K - P_0)\ .e^{-at}$$

Podemos observar que

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty}\left[K - (K - P_0)\ .e^{-at}\right] = K$$

isto é, se a doença não for controlada, então toda população ficará doente no futuro.

O ponto $P = K$ é uma assíntota horizontal de $P(t)$ e satisfaz a equação $\frac{dP}{dt} = a(K-P) = 0$. Dizemos, neste caso, que $P = K$ é um ponto de equilíbrio *de $P(t)$.*

Modelos Populacionais

Equações diferenciais do tipo

$$\frac{dy}{dx} = F(y) \tag{6.2.11}$$

são denominadas *equações autônomas* e desempenham um papel fundamental na modelagem de fenômenos biológicos. Utilizando o conceito de diferencial podemos escrever a equação 6.2.11 na forma

$$\frac{dy}{F(y)} = dx \tag{6.2.12}$$

desde que, $\frac{1}{F(y)}$ seja bem definida no intervalo de interesse, isto é, $F(y)$ não se anule e seja contínua num intervalo (a,b). Com esta hipótese podemos obter a solução geral de 6.2.11, integrando membro-a-membro a equação 6.2.12:

$$\int \frac{1}{F(y)}dy = x + C$$

Um exemplo típico deste tipo de equação é o **modelo malthusiano para crescimento populacional** (Modelo de Malthus-1798) que pode ser traduzido por: "o crescimento populacional é proporcional á população", ou seja,

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Se conhecemos o valor da população inicial P_0 para algum $t = 0$, teremos um problema de valor inicial (Problema de Cauchy)

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = aP \\ P_0 \text{ dado} \end{cases} \tag{6.2.13}$$

onde, a é a taxa de crescimento relativo. Como $P(t) > 0$ para todo $t \geqslant 0$, podemos escrever 6.2.13 na forma diferencial

$$\frac{1}{P}dP = adt \Longrightarrow \int \frac{1}{P}dP = \int adt$$

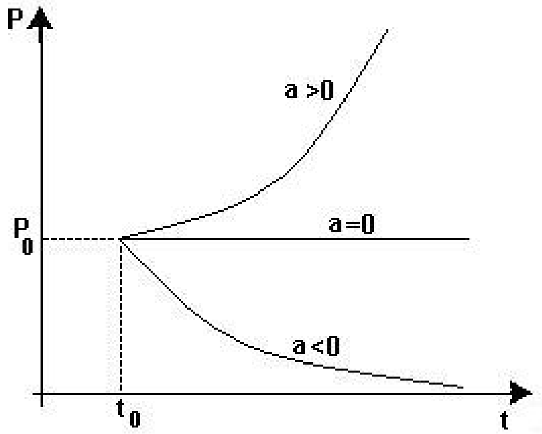
portanto,

$$\ln P(t) = at + C \Longrightarrow P(t) = e^{C+at} = e^c e^{at}$$

Considerando a condição inicial $P_0 = P(0)$, vem $P_0 = e^C \Rightarrow$

$$P(t) = \ P_0 e^{at}$$

ou seja, a população cresce exponencialmente se $a > 0$. Se $a < 0$, então a população será extinta.



$fig.6.10$ – Crescimento exponencial

Um modelo mais realístico leva em consideração que a taxa de crescimento relativa decresce quando a população cresce. O modelo logístico (Modelo de Verhurst-1837) é um exemplo deste fato, onde $a(P) = a(K - P)$:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = aP(K-P) \\ P_0 = P(0) \; ; K > P \text{ e } a > 0 \end{cases} \tag{6.2.14}$$

Agora, usando o procedimento de solução das equações autônomas, temos

$$\frac{1}{P(K-P)} dP = a\,dt$$

A função $F(P) = \frac{1}{P(K-P)}$ está bem definida no intervalo $(0, K)$. Então,

$$\int \frac{1}{P(K-P)} dP = \int a\,dt \tag{6.2.15}$$

O cálculo da integral $\int \frac{1}{P(K-P)} dP$ exige uma técnica distinta do que se viu até agora denominada **método das frações parciais-**

Devemos simplificar a função $F(P) = \frac{1}{P(K-P)}$, dividindo-a em uma soma onde sabemos calcular a integral de cada parcela:

$$\frac{1}{P(K-P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{K-P} \Longrightarrow \frac{1}{P(K-P)} = \frac{A(K-P)+BP}{P(K-P)}$$

Portanto, devemos ter $A(K-P)+BP = 1 \Longleftrightarrow AK + (B-A)P = 1 \Longrightarrow \begin{cases} AK = 1 \\ B-A = 0 \end{cases} \Longrightarrow$
$\begin{cases} A = \frac{1}{K} \\ B = A = \frac{1}{K} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{P(K-P)} = \frac{\frac{1}{K}}{P} + \frac{\frac{1}{K}}{K-P}$

$$\int \frac{1}{P(K-P)} dP = \frac{1}{K}\left[\int \frac{dP}{P} + \int \frac{dP}{K-P}\right] = \frac{1}{K}\left[\ln P - \ln(K-P)\right]$$

Asim, a equação 6.2.15 pode ser escrita como:

$$\frac{1}{K} \ln \frac{P}{K-P} = at + C$$

ou

$$\frac{P}{K-P} = e^{aKt} e^{C}$$

Considerando a condição inicial $P(0) = P_0$, vem que $e^C = \frac{P_0}{K-P_0} = k$. Vamos agora explicitar a função $P(t)$ em $\frac{P}{K-P} = ke^{aKt}$:

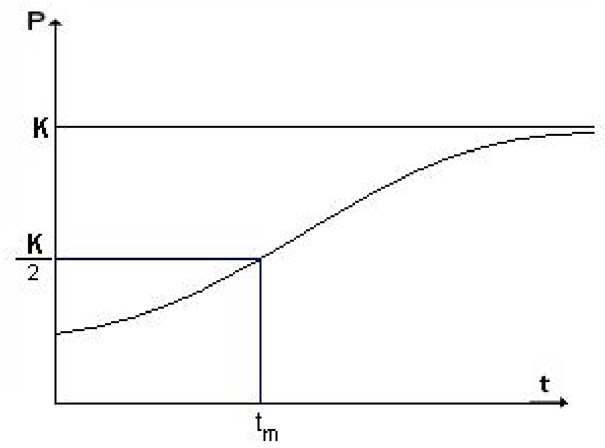
$$P = (K-P)ke^{aKt} \Longleftrightarrow P(1+ke^{aKt}) = Kke^{aKt} \Longrightarrow$$

$$P(t) = \frac{Kke^{aKt}}{(1+ke^{aKt})} = \frac{KP_0}{(K-P_0)e^{-aKt} + P_0}$$

Observamos que $\lim_{t\to\infty} P(t) = K$, ou seja, a população é sempre crescente pois

$$\frac{dP}{dt} = aP(K-P) > 0$$

mas tende a um valor fixo $K > P$, denominado *capacidade suporte de P*.



$fig.6.11$ – Curva logística

Exercício 28. *Use o método das frações parciais e resolva as integrais;*
(a) $\int \frac{dx}{x^2-4}$; *(b)* $\int \frac{3}{x^2+x-2}dx$; *(c)* $\int \frac{-(x+1)}{2x(x-1)^2}dx$

Alguns resultados provenientes das integrais definidas são bastante interessantes e auxiliam na resolução de problemas práticos. Neste contexto se encaixa o seguinte teorema:

Teorema 26. *(**Teorema do valor intermediário**) Seja f(x) uma função contínua em $[a,b]$. Existe um ponto $c \in [a,b]$, tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\ (b-a)$$

Este teorema afirma que se $f(x) > 0$, existe um ponto $c \in [a,b]$ tal que a área de A_a^b é igual à área do retângulo de lado $(b-a)$ e altura $f(c)$.

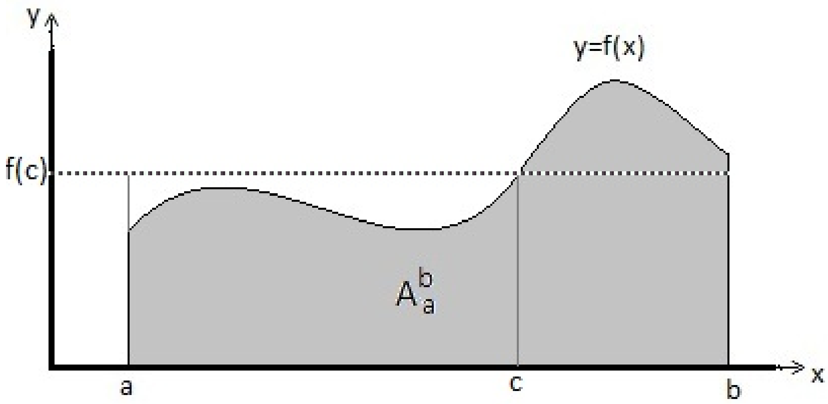


fig.6.12-Interpretação geométrica do teorema do valor intermediário

Demonstração. Sejam $\begin{cases} m = \text{mínimo de } f(x) \text{ em } [a,b] \\ M = \text{máximo de } f(x) \text{ em } [a,b] \end{cases}$ (existem, via Teorema de Weierstass, porque f é contínua em $[a,b]$).

Então, para todo $x \in [a,b]$, temos $m \leqslant f(x) \leqslant M$ e consequentemente

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M\ (b-a)$$

ou

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqslant M$$

ou seja, $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ está compreendido entre os valores máximo e mínimo de $f(x)$ e como f é contínua em $[a,b]$, deve existir um ponto $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \Longleftrightarrow \int_a^b f(x)dx = f(c).(b-a)$$

□

Proposição 19. *Seja $y = f(x)$ uma função definida e contínua em $[a,b]$, então a função $F(x)$ definida pela integral definida*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

é derivável em $[a,b]$ e $F'(x) = f(x)$.

Demonstração. Usando a definição de derivada $F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$, vem

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\left(\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt\right) - \int_a^x f(t)dt\right] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt
\end{aligned}$$

pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $c \in [x, x+h]$, tal que

$$\int_x^{x+h} f(t)dt = f(c)(x+h-x) = f(c)h$$

Logo,

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} f(c) = f(x)$$

pois, quando $h \to 0$, como $c \in [x, x+h]$, podemos concluir que $c \to x$ e, f sendo contínua implica que $f(c) \to f(x)$. □

Esta proposição dá um método para calcular a derivada de funções definidas por integrais sem que seja necessário o cálculo da integral.

Exemplo 70. *Se* $F(x) = \int_0^x \cos^2 t dt$ *então* $F'(x) = \cos^2 x$.

7 Aplicações da Integral Definida

Comuruxatiba-Ba

“ Eu penso que seria uma aproximação relativamente boa da verdade dizer que as ideias matemáticas têm a sua origem em situações empíricas mas são posteriormente governadas por motica(c)ões estéticas...”

J. Von Newmann

Vimos no capítulo anterior que a integral definida pode ser aplicada para o cálculo da área de A_a^b , limitada pelo gráfico de f e pelas retas $x = a, x = b$ e $y = 0$. Nesta seção, vamos usar a integral definida para calcular a área da figura limitada por duas curvas, volumes de revolução e comprimento de curvas.

7.0.3 Área entre duas curvas

Sejam f e g funções contínuas em $[a, b]$ e tais que $f(x) \geqslant g(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

a) Se $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$, então área de $A_a^b(f) = \int_a^b f(x)dx$ e área de $A_a^b(g) = \int_a^b g(x)dx$, temos que área de $A_a^b(f) \geqslant$ área de $A_a^b(g)$.

A área entre as curvas será dada por

$$\text{área da região entre as curvas } A_a^b(f,g) = \text{área de } A_a^b(f) - \text{área de } A_a^b(g) = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

(b) Se $g(x) \leqslant f(x) \leqq 0$, temos $-g(x) \geqslant -f(x) \geqslant 0 \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}\text{área da região entre as curvas } A_a^b(f,g) &= \text{área de } A_a^b(-g) - \text{área de } A_a^b(-f)\\ &= -\int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx\end{aligned}$$

De (a) e (b) podemos concluir que se $f(x) \geqslant g(x)$, então

$$\text{área da região entre as curvas } A_a^b(f,g) = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Exemplo 71. *Calcular a área limitada pelas curvas* $g(x) = 1$ *e* $f(x) = \sin x$ *, no intervalo* $[0, \pi]$*.(Fig. 7.1)*

Solução: Temos que $\sin x \leqslant 1$ *para todo x. Logo a área procurada é dada por:*

$$\int_0^\pi [1 - \sin x]\,dx = x + \cos x]_0^\pi = (\pi - 1) - (0 + 1) = \pi - 2$$

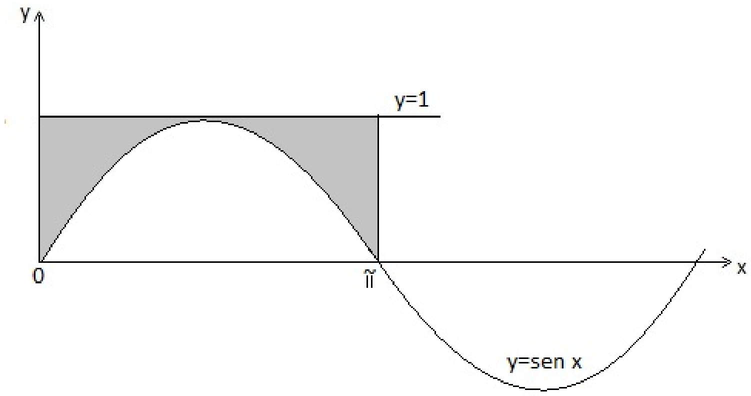
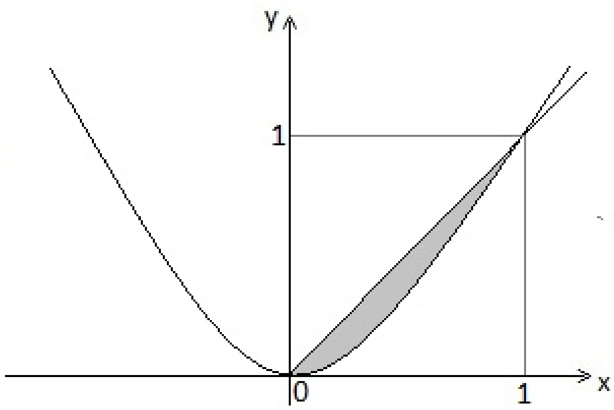


fig.7.1-Área da região limitada pelas curvas f e g.

Exemplo 72. *Determinar a área limitada pelas curvas* $g(x) = x^2$ *e* $f(x) = x$.



$fig.7.2 -$ *As curvas limitam uma região no intervalo* $[0,1]$

Solução: Temos que $x^2 = x \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ *então, a região* A_0^1 *limitada pelas curvas está definida no intervalo* $[0,1]$ *onde* $x \geqslant x^2$. *Logo,*

$$\text{área de } A_0^1(f,g) = \int_0^1 \left[x - x^2\right] dx = \left.\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Área de curvas dadas na forma paramétrica

Considere uma curva dada na forma paramétrica

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad \text{com t} \in [\alpha, \beta] \tag{7.0.1}$$

Sejam $a = \varphi(\alpha)$ e $b = \psi(\beta)$. Suponhamos que a equação 7.0.1 define uma função $y = f(x)$ com $x \in [a, b]$. Então, a área da região limitada pela curva 7.0.1 é dada por

$$A = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt \tag{7.0.2}$$

uma vez que $y = f(x) = f(\varphi(t)) = \psi(t)$ e $dx = \varphi'(t)dt$.

Exemplo 73. *Determinar a área limitada pela curva*

$$\begin{cases} x = \varphi(t) = a(1 - \sin t) \\ y = \psi(t) = a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad com\ t \in [0, 2\pi] \tag{7.0.3}$$

Solução: Aplicando a fórmula 7.0.2, temos $A = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)(-a\cos t)\,dt = a^2\left[-\int_0^{2\pi}\cos t dt + \int_0^{2\pi} \cos^2\right.$
Cálculo de $\int_0^{2\pi} \cos t dt = \sin t]_0^{2\pi} = \sin 2\pi - \sin 0 = 0.$

Cálculo de $\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt$:

Temos que $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ *e* $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t \Longrightarrow 2\cos^2 t = 1 + \cos 2t$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[1 + \cos 2t]dt = \frac{1}{2}2\pi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 2t dt$$

Agora, como $\frac{d}{dt}\sin 2t = 2\cos 2t \Longrightarrow \int \cos 2t dt = \frac{1}{2}\int \left[\frac{d}{dt}\sin 2t\right]dt = \frac{1}{2}\sin 2t$; *Portanto*

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 2t dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = 0$$

Então,

$$A = \pi a^2$$

Observamos que a curva 7.0.3 é uma circunferência de centro no ponto $(1, 1)$ *e raio* $R = a$.

7.1 Volumes

Consideremos um sólido limitado por dois planos paralelos, perpendiculares ao eixo-x; Sejam a e b os pontos em que tais planos cortam o eixo-x (Figura 7.3).

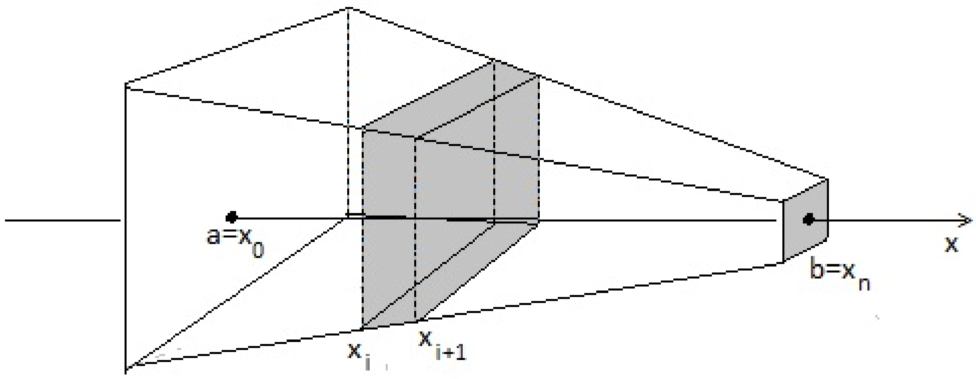


fig.7.3-Sólido “fatiado”

Vamos dividir o intervalo $[a,b]$ em n partes iguais, com os pontos $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = b$ e $\Delta x = x_i - x_{i-1}$.

Se $A(x)$ representa a área da secção do sólido por um plano perpendicular ao eixo-x, podemos considerar:

$$\begin{cases} A_i^+ : \text{máximo de } A(x) \\ A_i^- : \text{mínimo de } A(x) \end{cases} \quad \text{quando } x \in [x_{i-1}, x_i].$$

De modo que o volume $\Delta_i V$ da parte do sólido compreendida entre os planos $x = x_{i-1}$ e $x = x_i$, satisfaz a desigualdade:

$$A_i^- \Delta x \leqslant \Delta_i V \leqslant A_i^+ \Delta x$$

Consequentemente, existe um ponto $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$\Delta_i V = A(c_i)\Delta x$$

Como o sólido todo é a união das "fatias"determinadas pelos planos $x = x_i$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, temos

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \sum_{i=1}^{n} A(c_i)\Delta x = \int_a^b A(x)dx$$

Assim, conhecida a área $A(x)$ de cada secção do sólido pelo plano perpendicular ao eixo-x, o seu volume é dado por

$$V = \int_a^b A(x)dx \tag{7.1.1}$$

Exemplo 74. *Determinar o volume de uma esfera de raio R.*

Solução: Podemos pensar no volume de metade da esfera, considerando x no intervalo $[0,R]$.*Cada plano perpendicular ao eixo-x, num ponto genérico x, intersecciona a esfera num círculo de raio* $r = \sqrt{R^2 - x^2}$ *cuja área é*

$$A(x) = \pi r^2 = \pi\left(R^2 - x^2\right).$$

Então o volume da esfera será

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^R \left(R^2 - x^2\right)dx \\ &= 2\pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^R = 2\pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

Volume de Revolução

Sólidos de revolução são aqueles obtidos pela rotação de uma superfície plana em torno de um eixo. Vamos utilizar a integral definida para determinar o volume destes sólidos.

Seja $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, uma função contínua e positiva em $[a,b]$. Consideremos a região A_a^b definida pelas retas $x = a; x = b$, pelo eixo-x e pelo gráfico de $f(x)$. Obtemos um sólido de revolução se girarmos a região A_a^b em torno do próprio eixo-x (Figura 7.4):

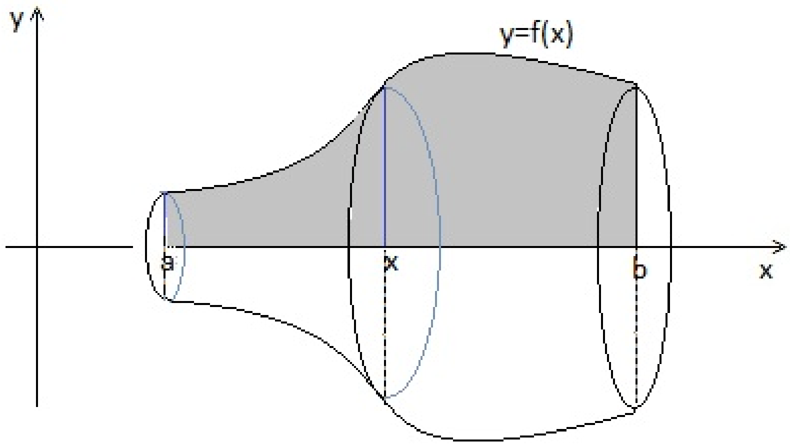


fig.7.4-Sólido de revolução da região A_a^b

Neste caso, a área de cada secção plana é dada por

$$A(x) = \pi y^2 = \pi [f(x)]^2$$

e o volume do sólido será:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \tag{7.1.2}$$

Exemplo 75. *(a) Calcular o volume do sólido de revolução, obtido quando se gira a região A_0^π determinada pela função $y = senx$ e pelas retas $y = 0; x = 0$ e $x = \pi$.*

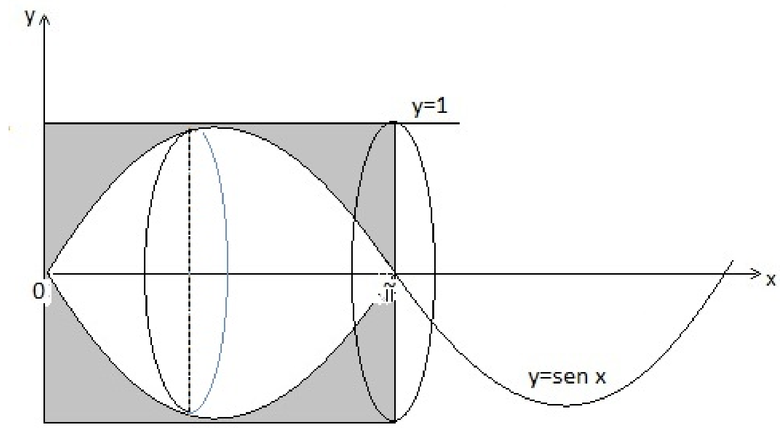


fig.7.5-Sólidos de revolução formados pela função sen x

Solução: Temos que $A(x) = \pi sen^2 x$

$$V = \pi \int_0^\pi sen^2 x dx$$

Como já vimos anteriormente: $sen^2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$, *logo*

$$V = \pi \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right] dx = \pi \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}senx\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

(b) Determinar o volume do cilindro ôco que envolve o sólido de revolução anterior.

Solução: O cilindro em questão, pode ser considerado como o sólido de revolução, obtido com a função constante $y = f(x) = 1$ *no intervalo* $[0, \pi]$. *assim, o volume deste cilindro será:*

$$V_C = \pi \int_0^{\pi} 1.dx = \pi [x]_0^{\pi} = \pi^2$$

Portanto, o volume do "cilindro ôco" será $V = V_C - \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{2}$, *ou seja, o volume do "buraco" é igual ao volume da "casca" deste cilindro ôco.*

Exemplo 76. *Determine o volume de um sólido cujas secções por planos perpendiculares ao eixo-x são círculos de diâmetros compreendidos entre as curvas* $y = x^2$ *e* $y = 8 - x^2$.

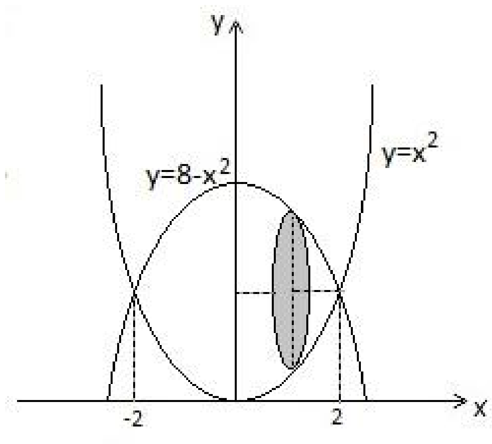


fig.7.6-Sólido determinado pelas parábolas

Solução: As parábolas se interseccionam nos pontos onde $8 - x^2 = x^2 \Longleftrightarrow x^2 = 4 \Longleftrightarrow x = 2$ *ou* $x = -2$.

O diâmetro de cada círculo, no ponto x, compreendido entre as curvas é $d = x^2 - \left(8 - x^2\right) = 2x^2 - 8 \Longrightarrow A(x) = \pi\left(\frac{2x^2-8}{2}\right)^2 = \pi\left(x^2 - 4\right)^2$. *Então,*

$$V = \pi \int_{-2}^{2} \left(x^2 - 4\right)^2 dx$$

Temos que $\int \left(x^2-4\right)^2 dx = \int \left(x^4-8x^2+16\right) dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 16x\right]$. *Então,*

$$V = \pi \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 16x\right]_{-2}^{2} = 2\pi \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 16x\right]_{0}^{2} \approx 107,23u_a$$

Método dos invólucros cilíndricos

O método anterior é usado para calcular volume de sólidos obtidos com a rotação da região A_a^b em torno do **eixo-x**. Agora, vamos calcular o volume de sólidos de revolução obtidos quando giramos A_a^b em torno do **eixo-y.** O processo utilizado é denominado *invólucro cilíndrico.* A situação pode ser representada pela Figura 7.7:

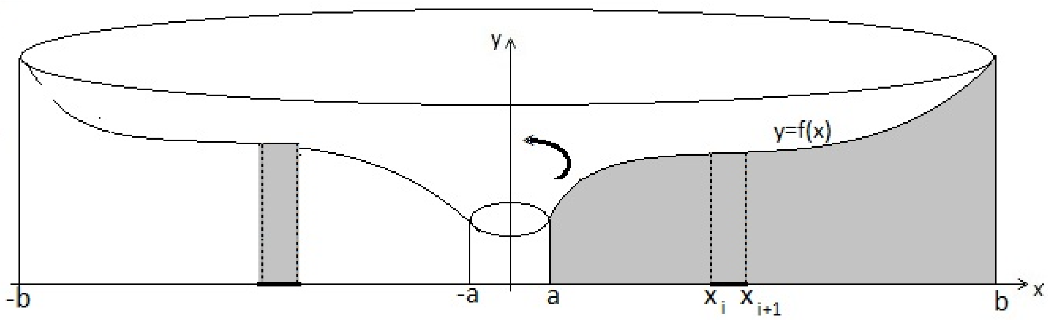


fig.7.7- Cálculo do volume de sólidos pelo método dos invólucros cilíndricos

Consideremos uma função $y = f(x)$ contínua e positiva em $[a,b]$. Vamos considerar uma partição de $[a,b]$ em n partes iguais, determinadas pelos pontos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 <, ..., < x_{n-1} < x_n = b \text{ e } \Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

Quando giramos $A_{x_{i-1}}^{x_i}$ em torno do eixo-y, o volume V_i do sólido obtido é o volume um "cilindro ôco", isto é,

$$V_i = f(c_i)\left\{\left[\pi x_i^2\right] - \left[\pi x_{i-1}^2\right]\right\} = \pi f(c_i)\left[(x_i - x_{i-1})(x_i + x_{i-1})\right]$$

para algum ponto $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Logo,

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} V_i = 2\pi \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) c_i \Delta x$$

Aplicando a definição de integral definida, vem

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx \qquad (7.1.3)$$

Exemplo 77. *Um círculo de centro no ponto $(a, 0)$ e raio $r < a$, girando em torno do eixo-y, produz um sólido denominado **toro**. Determine o seu volume.*

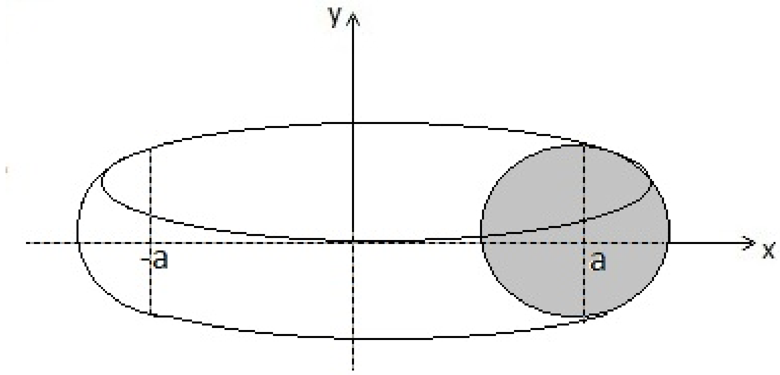


fig.7.8- Toro formado pela rotação de um círculo

Solução: A equação da circunferência que delimita o círculo é dada por

$$(x-a)^2 + y^2 = r^2$$

O semi-círculo superior é determinado pelo gráfico da função

$$y = +\sqrt{r^2 - (x-a)^2}$$

Usando a fórmula dada em 7.1.3, temos

$$\frac{1}{2} V = 2\pi \int_{a-r}^{a+r} x \sqrt{r^2 - (x-a)^2} dx$$

Para calcular a integral, consideramos a mudança e variáveis $u = x - a \Longrightarrow du = dx$. Logo,

$$V = 4\pi \int_{-r}^{r} (u+a) \sqrt{r^2 - u^2} dx = 4\pi \left[\int_{-r}^{r} a \sqrt{r^2 - u^2} dx + \int_{-r}^{r} u \sqrt{r^2 - u^2} dx \right]$$

Temos:

$$\int_{-r}^{r} a\sqrt{r^2-u^2}dx = a\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-u^2}dx = a\left[\frac{\pi r^2}{2}\right] = a\left[\text{área de um semi-círculo de raio } r\right]$$

$$\int_{-r}^{r} u\sqrt{r^2-u^2}dx = -\frac{1}{2}.\frac{2}{3}\left[r^2-u^2\right]^{\frac{2}{3}}\Bigg]_{-r}^{r} = 0 \;\; \textit{(Faça os cálculos)}$$

Portanto,

$$V = 4\pi a\frac{\pi r^2}{2} = 2a\pi^2 r^2$$

Exemplo 78. *O círculo $x^2+y^2 \leqslant r^2$, girando em torno dos eixos coordenados dá origem a uma esfera de raio r e centro na origem. Pelo centro desta esfera faz-se um buraco cilíndrico de raio $\frac{r}{2}$. Calcular o volume do sólido restante.*

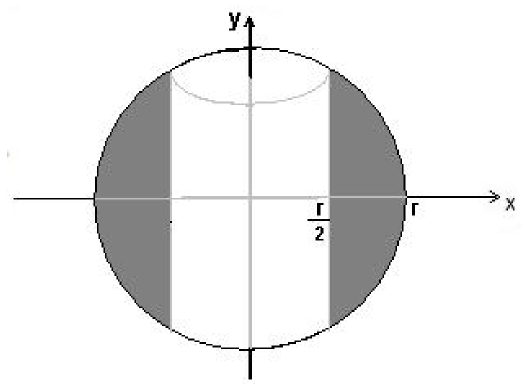


fig.7.9-Esfera com um buraco central

Solução: Metade do sólido em questão pode ser obtido pela rotação, em torno do eixo-y, da região $A_{\frac{r}{2}}^{r}$ determinada pela curva $y=\sqrt{r^2-x^2}$ no intervalo $\left[\frac{r}{2},r\right]$. Logo,

$$\frac{1}{2}V = 2\pi\int_{\frac{r}{2}}^{r} x\sqrt{r^2-x^2}dx$$

Portanto,

$$V = 4\pi\left[-\frac{1}{2}\frac{2}{3}\left(r^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{r}{2}}^{r} = \frac{4\pi}{3}\left[\left(r^2-\frac{r}{4}^2\right)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi r^3$$

7.2 Comprimento de arco

Arco ou trajetória é o lugar geométrico dos pontos do plano que satisfazem às equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

onde, $x(t)$ e $y(t)$ são supostas funções contínuas em $[a,b]$

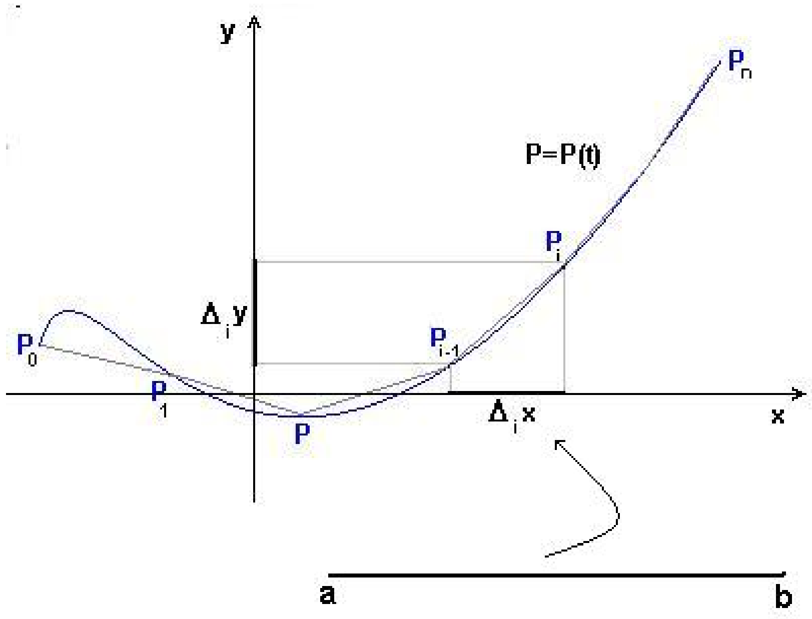


fig.7.10-Arco ou trajetória no plano

O arco é **regular** se as derivadas $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$ são funções contínuas em (a,b); O arco é **simples** se $t_1 \neq t_2$ implica $(x(t_1), y(t_1)) \neq (x(t_2), y(t_2))$, isto é, ele não se intersecciona. Vamos encontrar uma fórmula para calcular o comprimento de um arco:

Consideremos mais uma vez uma partição do intervalo $[a,b] : a = t_0 < t_1 < t_2 <, ..., < t_{n-1} < t_n = b$ e $\Delta t = t_i - t_{i-1} = \frac{b-a}{n}$. Sejam os pontos $P_0, P_1, P_2, ..., P_{n-1}, P_n$ correspondentes sôbre a curva, de modo que $P_i = (x(t_i), y(t_1))$ e, sejam $\Delta_i x = (x(t_i) - x(t_{i-1}))$ e $\Delta_i y = (y(t_i) - y(t_{i-1}))$ - Veja Figura 7.10.

O comprimento de cada segmento de reta $\overline{P_{i-1}P_i}$ que liga os pontos P_{i-1} e P_i é dado por

$$\left|\overline{P_{i-1}P_i}\right| = \sqrt{(\Delta_i x)^2 + (\Delta_i y)^2}$$

de modo que o comprimento da poligonal que liga os pontos $P_0, P_1, P_2, ..., P_{n-1}, P_n$ é

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta_i x)^2 + (\Delta_i y)^2}$$

Dizemos que o arco $C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $a \leqslant t \leqslant b$, é **retificável** e seu comprimento é denotado por $L_{a,b}(C)$ se existir o limite

$$L_{a,b}(C) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta_i x)^2 + (\Delta_i y)^2}$$

Teorema 27. *Se o arco* $C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ *,* $a \leqslant t \leqslant b$*, é regular então ele é retificável e*

$$L_{a,b}(C) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

Demonstração. Como x(t) e y(t) são funções contínuas e $[a,b]$ e com derivadas contínuas em (a,b) , podemos aplicar o Teorema da Média em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, obtendo

$$\Delta_i x = x'(c_i)\Delta_i t \;\text{ e }\; \Delta_i y = y'(d_i)\Delta_i t$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta_i x)^2 + (\Delta_i y)^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x'(c_i))^2 + (y'(d_i))^2}\Delta_i t$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta_i x)^2 + (\Delta_i y)^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x'(c_i))^2 + (y'(d_i))^2}\Delta_i t \Longrightarrow$$

$$L_{a,b}(C) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt \tag{7.2.1}$$

□

Observação : Se o arco for dado por uma função $y = f(x)$ derivável em (a,b), podemos determinar o comprimento da curva definida por f, escrevendo-a na forma paramétrica$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$ com $t \in [a,b]$, e usando a definição 7.2.1. Desta forma, teremos que o comprimento da curva será dado por

$$s_{a,b}(f) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}dt \tag{7.2.2}$$

Exemplo 79. *Determine o comprimento de uma semi-círcunferência de raio r.*

Solução: As equações paramétricas da semi-circunferência são

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \quad \textit{com } t \in [0,\pi].$$

Aplicando a fórmula 7.2.1, temos

$$L_{0,\pi} = \int_0^{\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}dt = r\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}dt = \pi r$$

Exemplo 80. *Determine o comprimento da curva* $y = f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ *para* $x \in [-1,8]$.

Solução: Como f não é diferenciável no ponto $x = 0$ *e* $0 \in [-1,8]$, *consideramos a curva definida em dois pedaços de* $[-1,8]$, *isto é,* $[-1,0]$ *e* $[0,8]$. *Agora temos que f é derivável em* $(-1,0)$ *e em* $(0,8)$ *e seu comprimento será a soma dos comprimentos em cada intervalo.*

Temos: $C_1 : \begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = \sqrt[3]{x^2} \end{cases}$ *para* $t \in [-1,0)$ *e* $C_2 : \begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = \sqrt[3]{x^2} \end{cases}$ *para* $t \in (0,8]$.

$$L_{-1,8}(f) = L_{-1,0}(f) + L_{0,8}(f)$$

ou seja,

$$L_{-1,8}(f) = \int_{-1}^{0} \sqrt{1 + \left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)^2} + \int_{-1}^{0} \sqrt{1 + \left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)^2} = \int_{-1}^{0} \sqrt{1 + \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}}$$

A integral resultante é complicada para se calcular e por isto vamos resolver usando um método diferente.

Vamos mudar a forma de considerar a parametrização da curva definida por f:

$$\begin{cases} x = -y^{\frac{3}{2}} \ , 0 \leqslant y \leqslant 1 \Longrightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}} \\ x = y^{\frac{3}{2}} \ \ , 0 \leqslant y \leqslant 4 \Longrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} L_{-1,8}(f) &= \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy + \int_0^{14} \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy \\ &= \int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}y}dy + \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}y}dy \\ &= \frac{8}{27}\left\{\left[\left(1+\frac{9}{4}y\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \left[\left(1+\frac{9}{4}y\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4\right\} \\ &= \frac{1}{27}\left(13\sqrt{13}+30\sqrt{10}-16\right) \approx 4,657 \end{aligned}$$

7.2.1 Área de Superfície

Seja A_a^b a região do plano determinada pelas retas $y = 0, x = a$ e $x = b$ e por uma função $y = f(x)$ positiva e contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b); Vamos determinar a área da superfície do sólido gerado pela rotação de A_a^b em torno do eixo-x :

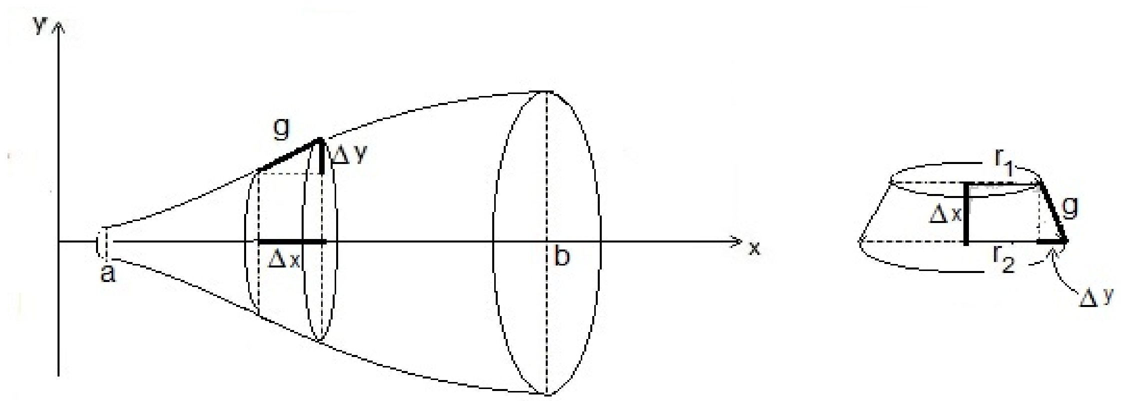


fig.7.11-Área de revolução

Sejam x e $x+\Delta x$ dois pontos consecutivos de uma partição do intervalo $[a,b]$, com $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. A área da parte da superfície compreendida entre estes dois pontos é, aproximadamente, igual área A_T do tronco de cone de altura Δx e, raios das partes planas $r_1 = f(x)$ e $r_2 = f(x+\Delta x)$.

A área de um tronco de cone é dada por:

$$A_T = \pi(r_1 + r_2)|g|$$

onde g é a geratriz, isto é, $|g|$ é o comprimento do segmento de reta que liga os pontos $(x, f(x))$ e $(x+\Delta x, f(x+\Delta x)) \Longrightarrow |g| = \sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y}$.

Logo,

$$A_T = \pi\left[f(x) + f(x+\Delta x)\right]\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y}$$

Então, a área lateral do sólido será:

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\pi\left[f(x_i) + f(x_i+\Delta x)\right]\sqrt{\Delta^2 x + \Delta_i^2 y}$$

ou seja,

$$A = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx \tag{7.2.3}$$

Exemplo 81. *A semi-circunferência $y = \sqrt{1-x^2}$, girando em torno do eixo-x, dá origem á superfície da esfera de raio 1. Vamos determinar sua área latera.*

Solução: Temos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \Longrightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$$

Aplicando estes valores em 7.2.3, vem

$$A = \pi\int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}dx = 2\pi\int_{-1}^{1} dx = 2\pi x]_{-1}^{1} = 4\pi$$

Exemplo 82. *Calcular a área da superfície gerada pela rotação da curva $y = x^3$, $x \in [0,1]$, em torno do eixo-x.*

Solução: Aplicando a fórmula 7.2.3, vem

$$A = 2\pi\int_0^1 x^3\sqrt{1+(3x^2)^2}dx = 2\pi\int_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}dx$$

Para resolver a integral consideramos a mudança de variáveis $u = 1+9x^4 \Longrightarrow du = 36x^3dx$

$$A = \frac{2\pi}{36}\int_1^{10}\sqrt{u}du = \frac{2\pi}{36}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^{10} = \frac{\pi}{27}\left[10^{\frac{3}{2}} - 1\right] \approx 3,56 \text{ \textit{unidade de área.}}$$

Exercício 29. ***Área entre curvas***

(1) Determine a área da figura limitada pelas curvas:
a) $y^2 = 4x$ *e* $y = 2x$;
b) $y^2 = ax$ *e* $y = a$;
c) $y = x^2 - 4$ *e* $y = 4 - x^2$.
(2) Encontre a área da figura limitada pela hipociclóide

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

Resposta: $\frac{3}{8}\pi a^2$.
(3) Encontre a área total da região determinada pelas curvas

$$y = x^3; y = 2x \ \ e \ \ y = x$$

Resposta: $\frac{3}{2}$.
(4) Calcule a área da região limitada pela elípse

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = bsent \end{cases}$$

(5) Mostre que a área limitada pelas curvas $y^2 = x - 1$ *e* $y = x - 3$ *é a mesma que a limitada por* $y^2 = x - 1$ *e* $y = 3 - x$.
Faça um gráfico do problema.

Exercício 30. ***Distância e velocidade***

(1) Calcular a distância percorrida por um móvel que se desloca com uma velocidade dada por $v = \frac{1}{2}t^2 - t + 1$, *com t variando de* 0 *a* 3.
(2) A aceleração de um móvel é constante $a = -1$. *Determine sua velocidade, sabendo-se que o espaço percorrido é igual a 7 quando t varia de 0 a 1.*
(3) A velocidade de um móvel é $v = t\sqrt{t}$. *Determine o instante* t_0 *de modo que o espaço percorrido pelo móvel seja maior que* $\frac{2}{5}$ *quando t varia de 0 a* t_0.

Exercício 31. ***Volume de revolução***

(1) Encontre os volumes dos sólidos gerados pela rotação da região limitada pelas retas $y = x; x = a$ *e* $y = 0$,
a) em torno do eixo-x;
b) em torno do eixo-y.
(2) Encontre o volume do sólido obtido quando a região limitada pelas curvas

a) $y = \sqrt{x}$; $y = 0$ *e a reta* $x = 2$, *gira em torno do eixo-x;*
b) $y = x + 2$ *e* $y = x^2$, *gira em torno do eixo-x;*
c) $y = \sqrt{x}$; $y = 0$ *e a reta* $x = 2$

d) $y = x^3$; $y = 0$ *e a reta* $x = 1$,*gira em torno* $\begin{cases} \text{do eixo} - x \\ \text{do eixo} - y \\ \text{da reta } y = 1 \end{cases}$

(3) Encontre o volume do toro obtido pela rotação em torno do eixo-x do círculo $x^2 + (y-3)^2 \leqslant 4$.

Exercício 32. ***Comprimento de arco***

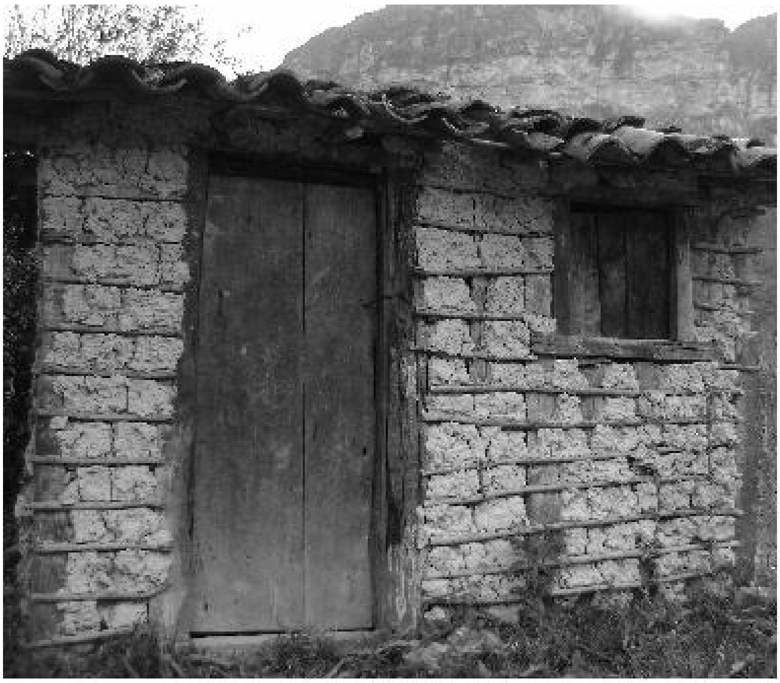
(1) Determine o comprimento do arco da parábola semi cúbica $ay^2 = x^3$, *com* $x \in [0, 5a]$.
Resposta: $\frac{335}{27}a$.
(2) Determine o comprimento do astróide

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases};$$

(3) Determine o perímetro da curcunferência $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$;
(4) Calcule o comprimento dos seguintes arcos:
a) $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$ *com* $1 \leqslant x \leqslant 3$;
b) $y = x^{\frac{3}{2}}$ *com* $1 \leqslant x \leqslant 4$;
c) $y = x^2$ *com* $-1 \leqslant x \leqslant 3$;
d) $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^2 \\ y = \frac{1}{2}t^2 \end{cases}$ *com* $1 \leqslant t \leqslant 3$;
e) $\begin{cases} x = e^{-t}\cos t \\ y = e^{-t}\sin t \end{cases}$ *com* $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Exemplo 83. ***Área de superfície de revolução***

(1) Encontre a área da superfície que se obtem girando a curva dada, em torno do eixo-x:
a) $y = a$ *com* $0 \leqslant x \leqslant h$ *(cilindro de raio a e altura h);*
b) $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$ *com* $1 \leqslant x \leqslant 2$;
c) $y^2 = 6x$ *com* $0 \leqslant x \leqslant 6$;
d) $x = \frac{1}{3}\sqrt[3]{y}$ *com* $1 \leqslant y \leqslant \sqrt[3]{2}$.



Casa de caboclo no Jalapão

"A educação inspirada nos princípios da liberdade e da solidariedade humana tem por fim o preparo do indivíduo e da sociedade para o domínio dos recursos científicos e tecnológicos que lhes permitem utilizar as possibilidades e vencer as dificuldades do meio".

(Lei 4024 - 20/12/61)

8.1 A. Regra de L'Hôpital

A regra de L'Hôpital é um processo que facilita o cálculo de limites de funções racionais que são das formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Este tipo e problema aparece com muita frequência quando calculamos derivadas de funções elementares, usando a definição. Um resultado fundamental que permite obter a regra de L'Hôpital é o seguinte:

Lema 1. ***de Cauchy***: *Sejam f(x) e g(x) contínuas em* $[a,b]$ *e diferenciáveis em* (a,b). *Se* $g'(x) \neq 0$, *para todo x*$\in (a,b)$, *então existe c*$\in (a,b)$ *tal que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Demonstração. $k = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ é um número bem definido, isto é, $g(b) \neq g(a)$ - Caso contrário, existiria um ponto c$\in [a,b]$ tal que $g\prime(c) = 0$ (Teor. de Rolle) o que contraria a hipótese.

Vamos construir a seguinte função auxiliar

$$F(x) = f(x) - f(a) - k[g(x) - g(a)]$$

Temos que $F(x)$ é contínua em $[a,b]$ e diferenciávem em (a,b), satisfazendo $F(a) = 0$ e $F(b) = 0$. Logo, pelo Teor. de Rolle aplicado a F, temos que existe um ponto c$\in [a,b]$ tal que $F\prime(c) = 0$, ou seja,

$$f'(c) - kg'(c) = 0 \Longrightarrow k = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

portanto,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

□

Teorema 28. ***de L'Hôpital:*** *Sejam* $f(x)$ *e* $g(x)$ *contínuas em* $[a,b]$ *e diferenciáveis em* (a,b). *Se* $f(x_0) = g(x_0) = 0$ *e existe o limite* $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *então,*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{8.1.1}$$

Demonstração. Sejam x e x_0 pontos de $[a,b]$, com $x > x_0$. As funções f e g satisfazem o Lema de Cauchy no intervalo $[x_0, x]$, portanto, existe $c \in [x_0, x]$ tal que

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ pois } f(x_0) = g(x_0) = 0.$$

Temos também que $c \to x_0$ quando x$\to x_0$ pois $x_0 \leqslant c \leqslant x$, então

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ que existe por hipótese.}$$

Observamos que, se no início da demonstração tivéssemos tomado x e x_0 pontos de $[a,b]$, com $x < x_0$, a demonstração seria análoga pois os limites laterais coincidem. □

Observações:

(1) O Teorema ainda vale mesmo que as funções f e g não sejam definidas para $x = x_0$, desde que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$.

(2) Se $f(x_0) = g(x_0) = 0$ e também $f'(x_0) = g'(x_0) = 0$ com f' e g' satisfazendo as condições do Teorema de L'Hôpital, então

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

(3) Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{\infty} g(x) = 0$ e $\lim_{x\to\infty} g'(x) \neq 0$, então

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demonstração. Considerando a mudança de variável $u = \frac{1}{x} \Longrightarrow u \to 0$ quando $x \to \infty$, podemos escrever:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t\to 0} \frac{-\frac{1}{t^2} f'(\frac{1}{t})}{-\frac{1}{t^2} g'(\frac{1}{t})} = \lim_{t\to 0} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

(4) Se f(x) e g(x) são contínuas e diferenciáveis em todo ponto x numa vizinhança de x_0. Sejam $g'(x) \neq 0$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x_0} g(x) = \infty$. Se $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir, então

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demonstração. (Veja Piskunov, pág. 147) □

Exemplo 84. *(1) Mostre que*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

Solução: As funções $f(x) = \sin x$ e $g(x)$ satisfazem as condições de Teorema de L'Hôpital (verifique), logo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1$$

(2) Calcular o limite

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right]$$

Solução: Este limite é da forma indeterminada $\infty - \infty$, entretanto, podemos escrever

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right] &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x}\right].\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - (-x\sin x + \cos x)}{2x} =\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2} = 0\end{aligned}$$

Resolva este exemplo, aplicando o Teorema de L´Hôpital logo no início, sem multiplicar por $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

(3) Calcular

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2 + b}{cx^2 + d}$$

Solução:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2 - b}{cx^2 + d} = \lim_{x\to\infty}\frac{2ax}{2cx} = \frac{a}{c}$$

Observação: Mesmo que $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ seja da forma $\frac{0}{0}$, é necessário que exista o $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ para que se possa aplicar a regra de L'Hôpital. Senão, vejamos:

Temos que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left[1 + \frac{\sin x}{x}\right] = 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Por outro lado, o quociente das derivadas, isto é, $\frac{1+\cos x}{1} = 1 + \cos x$ não se aproxima de nenhum limite pois oscila entre os valores 0 e 2, quando $x \to \infty$.

8.2 B. Fórmula de Taylor

Seja $f(x)$ uma função contínuas em $[a,b]$ e diferenciável até a ordem $n-1$ em (a,b). Seja $x_0 \in (a,b)$–Nosso objetivo é encontrar um polinômio $P_n(x)$ de grau não superior a n, satisfazendo:

$$P_n(x_0) = f(x_0); P_n'(x_0) = f'(x_0); P''_n(x_0) = f''(x_0); ...; P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0). \tag{8.2.1}$$

É de se esperar que tal polinômio seja, em certo sentido, uma aproximação da função $f(x)$. Para satisfazer (8.2.1) o polinômio deve ser do tipo

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-x_0) + C_2(x-x_0)^2 + ... + C_n(x-x_0)^n \tag{8.2.2}$$

com valores específicos para os coeficientes C_i :

Calculando as derivadas de $P_n(x)$, obtemos:

$$\begin{cases} P_n'(x) = C_1 + 2C_2(x-x_0) + 3C_3(x-x_0)^2 ... + nC_n(x-x_0)^{n-1} \\ P''_n(x) = 2C_2 + 3.2C_3(x-x_0) + ... + n(n-1)C_n(x-x_0)^{n-2} \\ P_n^{(3)}(x) = 3.2C_3 + ... + n(n-1)(n-2)C_n(x-x_0)^{n-3} \\ \text{...} \\ P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)...(n-n+1)C_n = n!C_n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} P_n'(x_0) = C_1 \\ P''_n(x_0) = 2C_2 \\ P_n^{(3)}(x_0) = 3.2C_3 \\ \text{..................} \\ P_n^{(n)}(x) = n!C_n \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} C_0 = f(x_0) \\ C_1 = f'(x_0) \\ C_2 = \frac{f''(x_0)}{2} \\ C_2 = \frac{f^{(3)}(x_0)}{2.3} \\ \text{............} \\ C_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \end{cases}$$

Substituindo estes valores em 8.2.2, vem

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{2.3} ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{8.2.3}$$

Seja $R_n(x)$ a diferença entre a função $y = f(x)$ e o polinômio $P_n(x)$, isto é,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{2.3} ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \tag{8.2.4}$$

Quando o *resto* $R_n(x)$ é pequeno, o polinômio $P_n(x)$ é uma "aproximação da função $f(x)$". O resto pode ser dado pela *fórmula de Lagrange*

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \tag{8.2.5}$$

onde, ξ está entre os valores x e $x_0 \Longrightarrow \xi = x_0 + \theta(x - x_0)$. Desta forma, podemos escrever 8.2.4 como

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{2.3}(x-x_0)^3 + ... \\ & + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0)) \end{aligned}$$

A expressão acima é denominada *Expansão de Taylor de f(x)* em torno do ponto x_0.

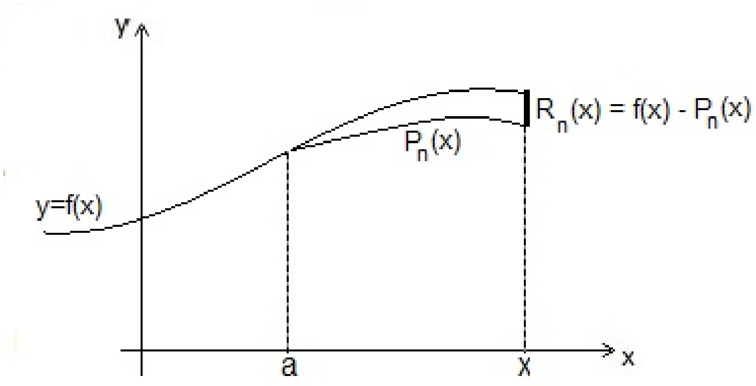


fig.B1-Expansão de Taylor e a função

Se $x_0 = 0$, a expansão de Taylor é dada por:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{2.3}x^3 ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \tag{8.2.6}$$

A expressão 8.2.6 é denominada *Série de McLaurin.*

Exemplo 85. *(a) Expansão da função $f(x) = senx$ em Série de McLaurin*

$f(x) = senx$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x = sen(x + \frac{\pi}{2})$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -senx = sen(x + 2\frac{\pi}{2})$	$f''(0) = 0$
$f^{(3)}(x) = -\cos x = sen(x + 3\frac{\pi}{2})$	$f^{(3)}(0) = -1$

$f^{(4)}(x) = senx = sen(x + 4\frac{\pi}{2})$ $\qquad f^{(4)}(0) = 0$

....

$f^{(n)}(x) = sen(x + n\frac{\pi}{2})$ $\qquad f^{(n)}(0) = \frac{n\pi}{2}$

$f^{(n+1)}(x) = sen(x + (n+1)\,\frac{\pi}{2})$ $\qquad f^{(n+1)}(\xi) = sen(\xi + (n+1)\,\frac{\pi}{2})$

Substituindo estes valores em 8.2.6, vem

$$senx = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + ... + \frac{1}{n!}x^n \sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1} sen\left[\xi + (n+1)\,\frac{\pi}{2}\right]$$

Observamos que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1} sen\left[\xi + (n+1)\,\frac{\pi}{2}\right] = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ pois $\left|sen\left[\xi + (n+1)\,\frac{\pi}{2}\right]\right| \leqslant 1$.

(b) Seja $x = \frac{\pi}{9}$, o erro cometido quando se toma $n = 3$ na série de McLaurin de $f(x) = senx$, dado por

$$R_3(\frac{\pi}{9}) = \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^4 sen\,[\xi + 2\pi] \leqslant 0,0006$$

Exercício 33. *Mostre que*

$$\cos x = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + R_n(x)$$

Exercício 34. *(a) Escreva a Série de McLaurin da função $f(x) = e^x$.*

(b) Calcule o valor aproximado de $f(1) = e$ com $n = 4$.

Bibliografia:

1. Elon L. Lima- "A equação do terceiro grau"; Revista Matem. Universitária, **5**, 1987.

2. Gilberto G. Gorbi- "O Romance das Equações Algébricas"; Ed. Makron Books, 1997.

3. Ulysses Sodré - http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/polinom/tartaglia.htp

4. http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_limites.htm

5. N. Piskunov- "Differential and Integral Calculus", Ed. Mir, Moscou.

6. E.Maor - e: A história de um número; Edit. Record, Rio de Janeiro, 2003.

7. J.Ferreira - A construção dos números; Coleção Textos Universitários, SBM, 2010.

8. R.C. Bassanezi - ensino-apredizagem com modelagem matemática, Edit. Contexto, terceira edição, 2009.

9. Malba Tahan - O homem que calculava; Edit. Record,