Torre de Hanoi: soluções às questões

Questão 1

Vamos começar com o caso $n = 1$, isto é, quando há somente um disco. Nesse caso, é muito fácil! Veja:

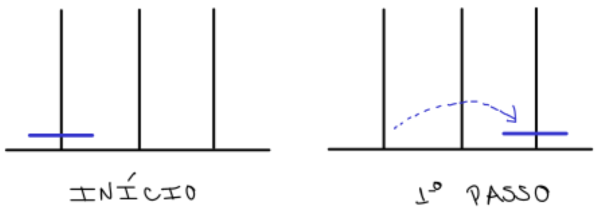

Figura 1: Torre de Hanoi com 1 disco

Então, como fica o quebra-cabeça com dois discos, isto é, o caso $n = 2$?

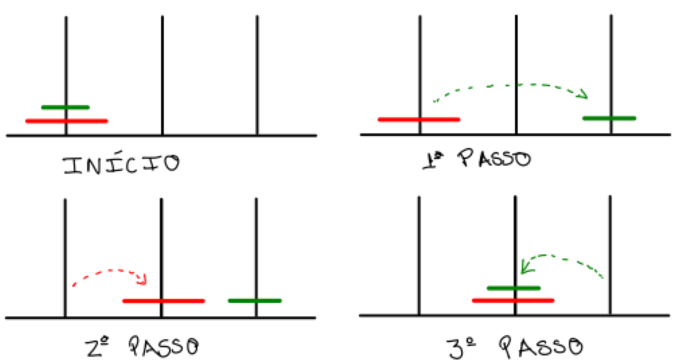

Figura 2: Torre de Hanoi com 2 discos

Note como os primeiros 3 passos são precisamente os mesmo que aqueles feitos no caso $n = 3$. Isto é, podemos "reduzir" o problema com 3 discos ao probleam com $n = 2$. Primeiro, fazemos os passos descritos acima, para $n = 2$, que permitem transferir a pilha de dois discos de um bastão para outro. O quarto movimento transfere o disco maior para o terceiro bastão. Em seguida, repetimos os passos de $n = 2$ para levar a pilha de discos do bastão do meio para o terceiro bastão:

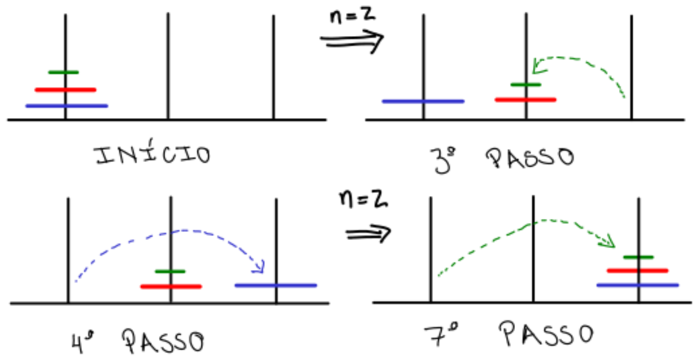

Figura 3: De $n = 2$ para $n = 3$

E agora, como fica o caso geral, com n discos? Vamos supor que sejam conhecidos os movimentos que transferem $n - 1$ discos de um bastão para outro. Essa é nossa hipótese indutiva. Agora, podemos reduzir o caso de n discos ao caso de $n - 1$ discos de forma semelhante à anterior:

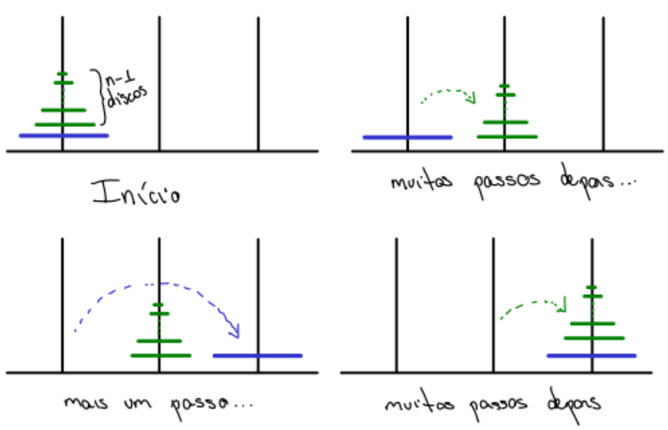

Figura 4: Torre de Hanoi com n discos

Questão 2

Vimos que se $n = 2$, são necessários 3 movimentos, e se $n = 3$ são necessários 7 movimentos. E no caso geral? Vamos supor que $P(n)$ seja a quantidade mínima de movimentos para o caso geral, i.e., a torre de Hanoi com n discos. Pela resolução acima, primeiro fazemos $P(n-1)$ movimentos para levar a pilha com $n-1$ discos para o bastão do meio, em seguida fazemos mais um movimento para levar o maior disco ao bastão vazio, e por fim fazemos mais $P(n-1)$ movimentos para levar a pilha do meio ao terceiro bastão. Então ficamos com a seguinte fórmula recursiva:

$$P(n) = 2P(n-1) + 1$$

De fato, se $n = 2$, $P(2) = 2P(1) + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ e se $n = 3$, $P(3) = 2P(2) + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$. Assim, podemos montar uma tabela:

Número de discos	Quantidade mínima de movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127

Note como o número mínimo de movimentos é sempre uma potência de 2 menos uma unidade: $1 = 2^1 - 1$, $3 = 2^2 - 1$, ..., $127 = 2^7 - 1$. Vamos mostrar que, de fato, $P(n) = 2^n - 1$. Mostramos que vale para o caso base, com $n = 1$. Suponha que seja verdade para $n-1$, isto é, $P(n-1) = 2^{n-1} - 1$, e vamos mostrar que segue sendo verdade para n. Temos:

$$P(n) = 2P(n-1) + 1 = 2\left(2^{n-1} - 1\right) + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot 1 + 1 = 2^n - 1\,.$$

Com isto, $P(n) = 2^n - 1$ para todo natural $n \geq 1$.

Questão 3

Em particular, se $n = 64$, então

$$P(64) = 2^{64} - 1 \approx 2^{64} = 10^{64 \log_{10} 2} \approx 10^{19.2} = 10^{\frac{1}{5}} \times 10^{19} \approx 1.58 \times 10^{19}$$

Se cada movimento leva um segundo para ser feito, então isso é da ordem de 10^{19} segundos. Levando em conta que 1 ano tem da ordem de 10^7 segundos, os monges levariam então 10^{12} anos para completar sua tarefa, ou 1000 bilhões de anos, ou 100 vezes a idade do universo!