Mussini, F.B; Miranda, D
Centro de Matemática, Computação e Cognição, Universidade Federal do ABC
{filipe.mussini; daniel.miranda}@ufabc.edu.br

Resumo:

As geometrias clássicas são variedades riemmanianas obtidas a partir da projetivização de espaços vetoriais dotados de uma forma bilinear. São exemplos de geometrias que podem ser obtidas dessa forma as geometrias hiperbólica real e complexa e os espaços de de Sitter. A abordagem desses espaços via projetivização apresenta diversas vantagens em relação a abordagem usual, pois os objetos estudados são tratados de forma linear e sem coordenadas. Nesse trabalho caracterizamos diversas propriedades dessas geometrias, dentre estas: as geodésicas, a conexão, o tensor de curvatura e a curvatura escalar.

Resultados

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e sejam v e w dois vetores não nulos de V, definimos uma relação de equivalência $\sim$ em $V \setminus \{0\}$ como:

$$v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0 | \lambda v = w$$

Chamamos o espaço quociente $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V := V \setminus \{o\}/\sim$ de **plano projetivo** de V sobre $\mathbb{K}$. Dado um ponto não isotrópico, i.e, $\langle p, p \rangle \neq 0$ temos a seguinte identificação entre o espaço tangente a $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ e as transformações lineares de V em $p^{\perp}$:

$$T_p\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V \simeq \underset{\mathbb{K}}{Lin}\,(\mathbb{K}p, V/\mathbb{K}p) \simeq \langle -, p \rangle\, p^{\perp}$$

Dotamos tal espaço tangente da seguinte forma bilinear:

$$\langle\!\langle \langle -, p \rangle\, v_1, \langle -, p \rangle\, v_2 \rangle\!\rangle := \pm \Re(\langle p, p \rangle \langle v_1, v_2 \rangle)$$

Definição. *Uma **geometria clássica** é um espaço vetorial V, projetivizado sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, escolhida uma assinatura e um sinal na forma acima.*

Utilizando os conceitos definidos acimas podemos demonstrar os seguintes resultados:

Teorema. *Uma **geodésica** em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ é a projetivização de $W \subset V$, W subespaço vetorial real de dimensão 2, tal que a forma $\langle\ ,\ \rangle|_W$ é real e não-degenerada.*

Teorema. *A conexão associada à métrica pseudo-riemannnniana é dada por:*

$$\nabla_t X(p) = (\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} X((1+\epsilon t)p))_p$$

Teorema. *O tensor de curvatura de uma geometria clássica é dado por*

$$R\left(T_1,T_2\right)S = st_1^*t_2 + t_2t_1^*s - st_2^*t_1 - t_1t_2^*s$$

Teorema. *A curvatura seccional no plano S gerada pelos vetores $t_1 = \langle -,p\rangle\, v_1$ e $t_2 = \langle -,p\rangle\, v_2$ é dada por:*

$$K\left(t_1,t_2\right) = \pm\left(1 + \frac{3\left|k-\overline{K}\right|^2}{4(\sigma_1\sigma_2 - (Re\,k)^2)}\right)$$

onde $\sigma_j = \langle v_j, v_j\rangle$ e $k = \langle v_1, v_2\rangle$

Desta formula, podemos concluir que, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $K\left(t_1,t_1\right) = \pm 1$. Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, os resultados são mostrados na tabela abaixo:

Forma sobre $v_1\mathbb{C} + v_2\mathbb{C}$	Métrica em W	Curvatura Seccional
Indefinida	Indefinida	$\pm(-\infty, 1]$
Definida	Definida	$\pm[1, 4)$
Degenerada	Definida	± 4
Indefinida	Definida	$\pm(4, \infty)$

Tabela 1: Possiveis curvaturas seccionais para diferentes métricas

Conclusão

A abordagem das geometrias clássicas possibilita o tratamento unificado de diversas geometrias riemannnnianas e pseudo-riemannnnianas de forma simultânea. Através da descrição projetiva obtivemos expressões e descrições para diversas grandezas geométricas importantes, dentre estas: a conexão, o tensor de curva curvatura, a curvatura seccional, e as geodésicas. Para todos esses objetos a descrição final obtida é elementar, e em particular no caso das geodésicas essa descrição é linear.

Este trabalho foi financiado pelo pelo CNPq.

Palavras-Chave: *Geometria Hiperbolica Real, Geometria Hiperbólica complexa, Geometria Riemanniana, Plano Projetivo.*