Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais

Masquete, A. O.; Silva,I. A. M.
Universidade Federal do ABC

Introdução

Desde a criação do cálculo diferencial e integral no século XVII, que o estudo de Equações Diferenciais é estimulado devido a sua aplicação satisfatória à mecânica das partículas, nessas aplicações é possível a obtenção de Equações Diferenciais Ordinárias(EDO) que representam os fenômenos em estudo. Contudo ao tentar aplicar o cálculo diferencial à mecânica do contínuo obtêm-se Equações Diferenciais Parciais (EDP), trazendo sérias dificuldades matemáticas em sua resolução. Um dos problemas clássicos que já aparecem nos estudos dos matemáticos do século XVIII é o problema das vibrações transversais de uma corda: a posição $u(x, t)$ de um ponto x da corda, num instante t, deve satisfazer a equação das ondas

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

Na tentativa de resolver um problema como este utilizando a matemática do cálculo diferencial e integral, nota-se que ela é insuficiente e necessita de algo a mais, e este algo mais é o chamado método de Fourier.

Objetivos

O objetivo principal desse trabalho foi o estudo da análise de Fourier e EDP's no tratamento de problemas clássicos da mecânica do contínuo, como a condução do calor em uma barra ou as vibrações transversais em uma corda.

Metodologia

O método de resolução desse problema é conhecido como o método de Fourier, o qual consiste em duas etapas. Na primeira, utiliza-se separação de variáveis para se obter problemas de autovalor, para equações diferenciais ordinárias, estreitamente relacionados com as EDP's em estudo. Nessa etapa, obtém-se uma família de soluções da EDP que satisfazem a uma parte das condições de fronteira. A idéia é utilizar tais soluções para compor a solução do problema, como uma série cujos termos são produtos dessas soluções por coeficientes adequadamente escolhidos; essa segunda etapa requer a chamada Análise de Fourier.

Resultados

A equação das ondas pode apresentar variações de acordo com as forças externas aplicadas sobre o sistema. Tomando como exemplo o caso da corda finita com extremidades fixas. O problema de valor inicial e de fronteira para este caso é dado por:

$$u_t = c^2 u_{xx}, \quad \text{em } R,$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad \text{para } t \geq 0,$$
$$u(x,0) = f(x), u_x(x,0) = g(x), \quad \text{para } 0 \leq x \leq L.$$

Aplicando o método de Fourier na equação das ondas, junto às condições iniciais e de fronteira, chegamos à seguinte solução para o PVIF:

$$u(x,t) = \Sigma_{n=1}^{\infty}[a_n sen\frac{n\pi x}{L} cos\frac{n\pi ct}{L} + b_n sen\frac{n}{L} sen\frac{n}{L}].$$

Onde as constantes a_n e b_n serão dadas por

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L sen\frac{n}{L}dx, b_n = \frac{2}{n}\int_0^L g(x)sen\frac{n}{L}dx.$$

Conclusão

O método Fourier é bastante útil na resolução de problemas da mecânica do contínuo, tais como a condução de calor em uma barra, vibrações transversais em uma corda, tensão e corrente em linhas de transmissão, etc... Isso devido ao fato de obter soluções de uma EDP de difícil resolução, como uma série de termos trigonométricos, que são funções bem conhecidas.

Observações

Durante o projeto também foi estudado o problema da condução do calor em uma barra, transformada de Fourier e o problema de Dirichlet para a equação de Laplace.

Palavras-chave:

Equação Diferencial, Séries de Fourier, equação da onda.